Сечения по трём точкам

Теория, построение следов, три подробных примера · 10–11 классы

Цель: понять, почему три точки определяют плоскость, и научиться строить полное сечение.

В пространстве через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит ровно одна плоскость. Это основа метода сечения по трём точкам. Изобразить только треугольник PQR недостаточно: плоскость может пересекать другие рёбра и давать четырёх-, пяти- или шестиугольник.

Пошаговое построение

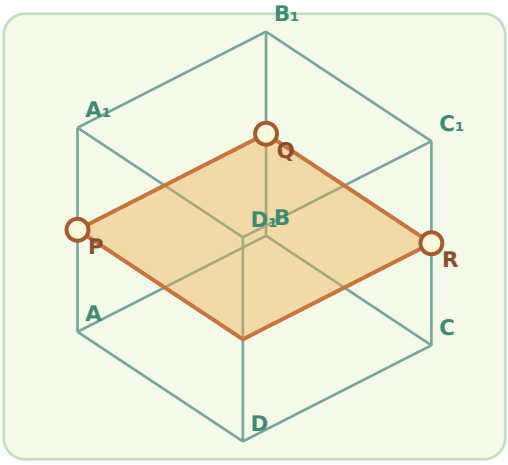
1. Отметьте P, Q, R и проверьте, что они не коллинеарны.
2. В каждой грани найдите общие точки с секущей плоскостью.
3. Проведите следы — отрезки пересечения плоскостей граней и PQR.
4. Соберите многоугольник из всех сторон и обоснуйте их принадлежность граням.

Разобранный пример № 1. Середины боковых рёбер куба

Дано: куб ABCD $A_1B_1C_1D_1$ со стороной 4. P, Q, R — середины AA_1, BB_1, CC_1.

Идея. Середины трёх вертикальных рёбер лежат на высоте z = 2. Следовательно, плоскость PQR параллельна плоскости основания и пересечёт DD_1 в его середине T.

Сечение PQRT — квадрат со стороной 4. Площадь $S = 4^2 = 16$; периметр $4 \cdot 4 = 16$.



Почему это доказательство корректно?

Отрезки, соединяющие середины вертикальных рёбер на боковых гранях, параллельны соответствующим сторонам основания. Четвёртая точка T определяется пересечением плоскости с DD_1. Все четыре найденные стороны целиком лежат в гранях куба.

Ещё два примера

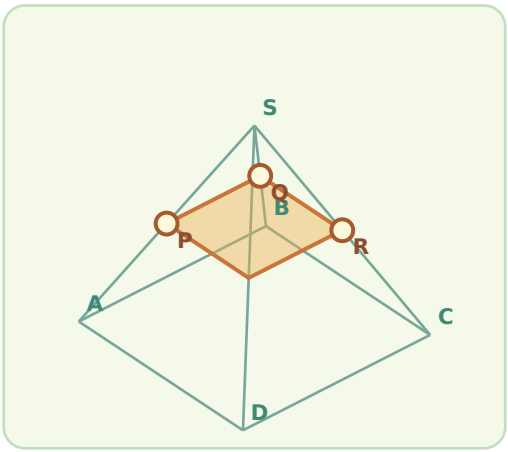
Подобие в пирамиде и наклонное сечение куба

Пример № 2. Пирамида: сечение через середины боковых рёбер

В пирамиде SABCD основание — квадрат 4 × 4, высота равна 4. P, Q, R — середины SA, SB, SC. Через них проходит плоскость, параллельная ABCD.

Сечение пересекает SD в середине T. Треугольники SPQ и SAB подобны, их коэффициент 1/2, поэтому PQ = 2. Аналогично остальные три стороны равны 2.

Получаем квадрат PQRT. $S = 2^2 = 4$, $P = 4 \cdot 2 = 8$.

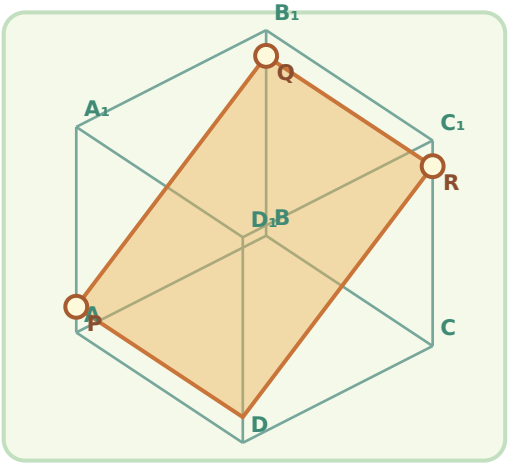


Пример № 3. Наклонное прямоугольное сечение куба

Возьмём P на AA_1 на высоте 0,5, Q на BB_1 на высоте 3,5 и R на CC_1 на высоте 3,5. На четвёртом вертикальном ребре DD_1 найдём T на высоте 0,5.

$PQ = \sqrt{(4^2 + 3^2)} = 5$: вдоль AB горизонтальное смещение 4, перепад высоты 3. QR = 4, поскольку Q и R имеют одинаковую высоту и находятся над B и C.

PQ ⊥ QR: PQ не имеет составляющей вдоль BC. Получилось прямоугольное сечение со сторонами 5 и 4. S = 20, P = 18.



Доказательства и ошибки

Как проверить сечение и где чаще ошибаются

Главный критерий правильности

Сторона сечения принадлежит одновременно секущей плоскости и одной из граней многогранника. Если две точки принадлежат обеим плоскостям, прямая через них есть линия их пересечения. Поэтому для каждой стороны достаточно указать соответствующую грань и две общие точки.

Проверка особого случая

Пусть P, Q, R лежат на одном ребре AB. Тогда PQ и PR параллельны. Через прямую AB можно провести бесконечно много плоскостей, поэтому единственная секущая плоскость PQR не определяется. В координатах это равносильно $(Q - P) \times (R - P) = 0$.

Типичные ошибки и способы проверки

Остановились на треугольнике PQR. → Проверьте пересечения с оставшимися рёбрами.

Соединили две точки, лежащие на разных несмежных гранях. → Укажите общую грань или дополнительную линию следа.

Посчитали площадь по картинке. → Сначала восстановите действительные длины в пространстве.

Не проверили расположение трёх точек. → Убедитесь, что $(Q - P) \times (R - P) \neq 0$.

Приписали вершин больше, чем у многоугольника. → Уберите точки, лежащие внутри прямолинейной стороны.

Упражнения для обсуждения

1. Почему сечение выпуклого многогранника выпукло?
2. Может ли сечение куба иметь семь вершин? Обоснуйте.
3. Объясните, как различить след плоскости и ребро исходной фигуры.

Продолжение: разделы «Сечения куба и пирамиды», «Координаты и векторы в пространстве». Открытый интерактивный тренажёр /lab/three-point-section. Для самостоятельной работы: пять вариантов по десять заданий в отдельном PDF.