Сечения куба и пирамиды

Цель: научиться представлять плоскость в пространстве, строить точки её пересечения с рёбрами, находить форму и размеры сечения и обосновывать построение.

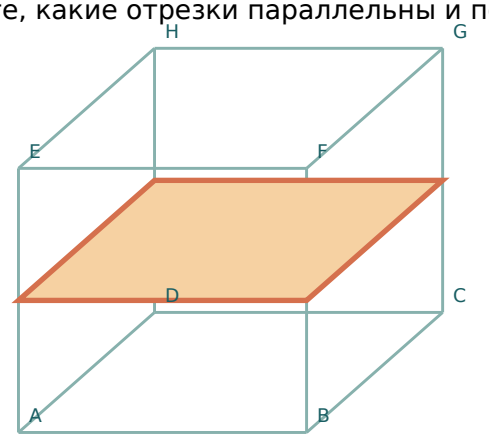
Зачем это нужно? На чертеже плоскость может выглядеть как произвольный четырёхугольник, хотя на самом деле она пересекает грани по прямым и образует многоугольник с точно вычисляемыми вершинами.

Теория. Что такое сечение?

Сечение многогранника плоскостью — множество точек фигуры, принадлежащих плоскости. Для невырожденного сечения выпуклого многогранника оно представляет собой выпуклый многоугольник. Ребро пересекает плоскость в точке, если его концы лежат по разные стороны плоскости (особый случай — вершина на плоскости).

Алгоритм построения

1. Выберите секущую плоскость. 2. Найдите рёбра, пересекающие её. 3. Отметьте точки пересечения. 4. На каждой грани соедините точки, лежащие и на грани, и в секущей плоскости. 5. Обоснуйте, какие отрезки параллельны и почему.

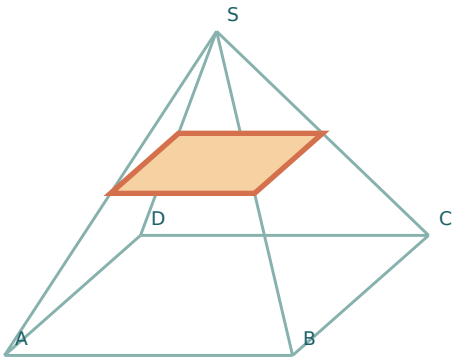


Секущая плоскость параллельна основанию

Пример 1. Горизонтальное сечение куба

У куба ребро 4 см. Плоскость на высоте 2 см от основания параллельна основанию. Сечение — квадрат со стороной 4 см, поскольку на каждой боковой грани образуется отрезок, параллельный соответствующему ребру основания. Площадь $S = 4 \cdot 4 = 16$ см², периметр $P = 4 \cdot 4 = 16$ см.

Пример 2. Горизонтальное сечение правильной пирамиды



Секущая плоскость параллельна основанию

Сторона основания пирамиды равна 6 см, высота 6 см. Плоскость на высоте 2 см параллельна основанию. Верхняя пирамида имеет высоту 4 см, коэффициент подобия равен 4/6 = 2/3. Сторона сечения — 6·2/3 = 4 см, площадь — 16 см², периметр — 16 см.

Пример 3. Наклонное сечение куба

В кубе с ребром 4 см проведена плоскость z = 2 + (3/4)(x − 2). Она пересекает все четыре вертикальных ребра. Сечение — прямоугольник. Одна его сторона имеет длину 4 см; вторая является гипотенузой с катетами 4 см и 3 см, то есть равна 5 см. Площадь равна 20 см², периметр — 18 см.

Почему прямоугольник?

Две его стороны параллельны оси y, а две другие имеют направляющий вектор (1; 0; 3/4). Их скалярное произведение с (0; 1; 0) равно нулю; соседние стороны перпендикулярны. Противоположные стороны параллельны.

Типичные ошибки

Не соединяйте произвольные вершины на разных гранях: отрезок сечения в каждой грани лежит одновременно в этой грани и в секущей плоскости. Не путайте расстояние от вершины пирамиды до сечения с расстоянием от основания. При сравнении площадей подобных фигур возводите коэффициент подобия в квадрат.

Проверьте себя: постройте сечение при горизонтальной плоскости, затем наклоните её и объясните, почему число вершин сечения может измениться. Интерактивный тренажёр доступен в разделе «Лаборатория → Стереометрия».