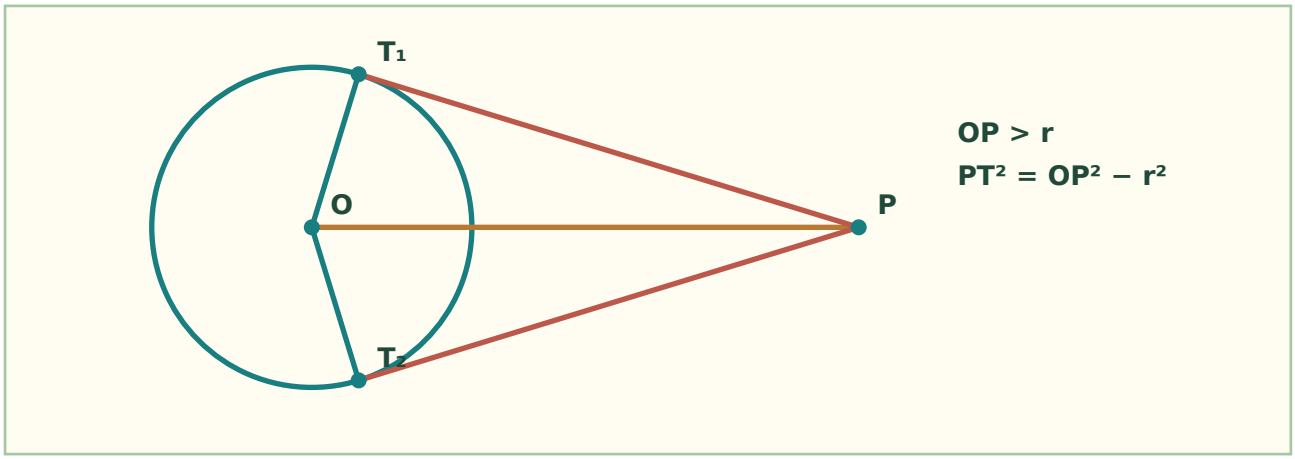
Касательные, вписанные углы и подобие

Цель урока: научиться видеть необходимые дополнительные построения, различать дуги окружности и доказывать подобие треугольников.

1. Касательная к окружности

Касательная имеет с окружностью единственную общую точку T. Радиус OT, проведённый к точке касания, перпендикулярен касательной PT. Если P — внешняя точка, то $PT^2 = OP^2 - r^2$. Две касательные из одной точки равны по длине.

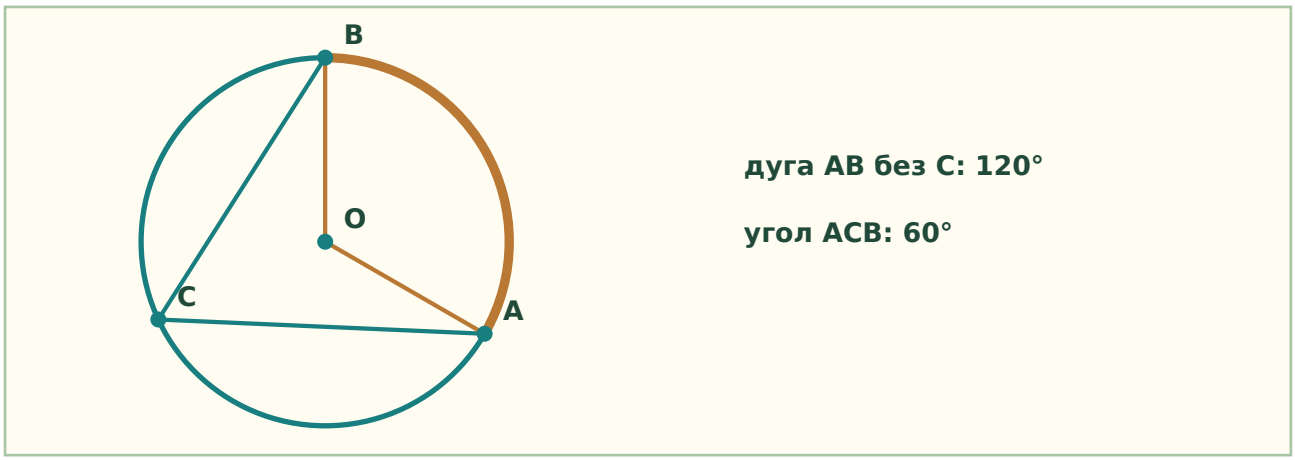


Пример 1. OP=13, OT=5. Так как ∠OTP=90°, по теореме Пифагора $PT^2=13^2-5^2=144$, следовательно PT=12. Почему не 8? Нельзя просто вычитать длины радиуса и OP: касательная — второй катет, а не часть OP.

Теорема о касательной и секущей: если секущая из P пересекает окружность в A и B (A ближе к P), то $PT^2=PA\cdot PB$. Это следует из подобия треугольников PTA и PBT.

2. Вписанный угол и дуга

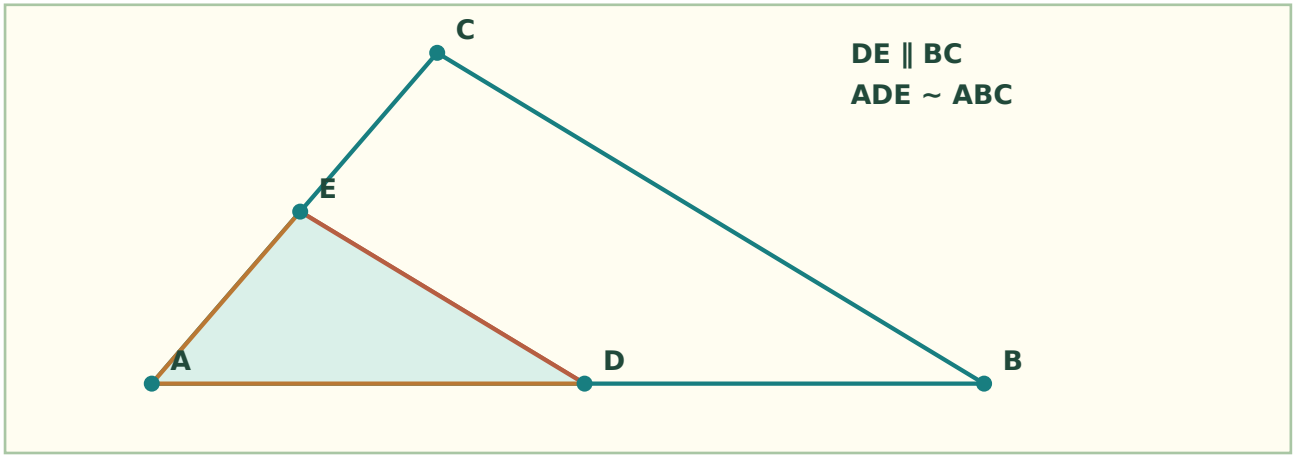
Вписанный угол ACB равен половине дуги AB, которая НЕ содержит C. Когда C перемещается на другую дугу AB, измеряемая дуга меняется. Для вписанного четырёхугольника сумма противоположных углов равна 180°.



Пример 2. Если дуга AB без C равна 140°, то ∠ACB=70°. На другой дуге точка C задаёт угол 110°, потому что новая дуга без C равна 360°−140°=220°. Поэтому нельзя всегда брать меньшую дугу.

3. Параллельный отрезок и подобие

Если в △ABC точки D∈AB и E∈AC таковы, что DE∥BC, то ∠ADE=∠ABC и ∠AED=∠ACB. Значит △ADE~△ABC по двум углам. Обозначив k=AD/AB, получаем DE/BC=AE/AC=k и S(ADE)/S(ABC)=k².



Пример 3. Пусть AB=10, AD=4, BC=15, S(ABC)=75. Тогда k=4/10=0,4; DE=15·0,4=6, площадь ADE равна 75·(0,4)²=12. Для площади коэффициент обязательно возводят в квадрат.

Как выбирать дополнительное построение

Нужен прямой угол? Проведите радиус к точке касания. Нужна связь с центральным углом? Соедините точки окружности с центром. Нужно получить пропорции сторон? Проведите параллельный отрезок и докажите подобие. В каждом случае сначала назовите теорему, затем проверяйте условия её применения.

Типичные ошибки

• Путать касательную и секущую. • Выбирать дугу AB, содержащую C. • Применять признак подобия без указания равных углов. • Считать отношение площадей равным k вместо k². • Делить длины произвольных сторон, не соблюдая соответствия вершин.

Самопроверка и продолжение

Решите 5 вариантов из отдельного PDF. В задачах № 9–10 каждого варианта запишите полное доказательство. Интерактивный тренажёр позволяет проверить числовые ответы и ключевой шаг, но оценка за доказательство выставляется только после проверки рассуждения человеком.