Векторы: исследуем, вычисляем, строим

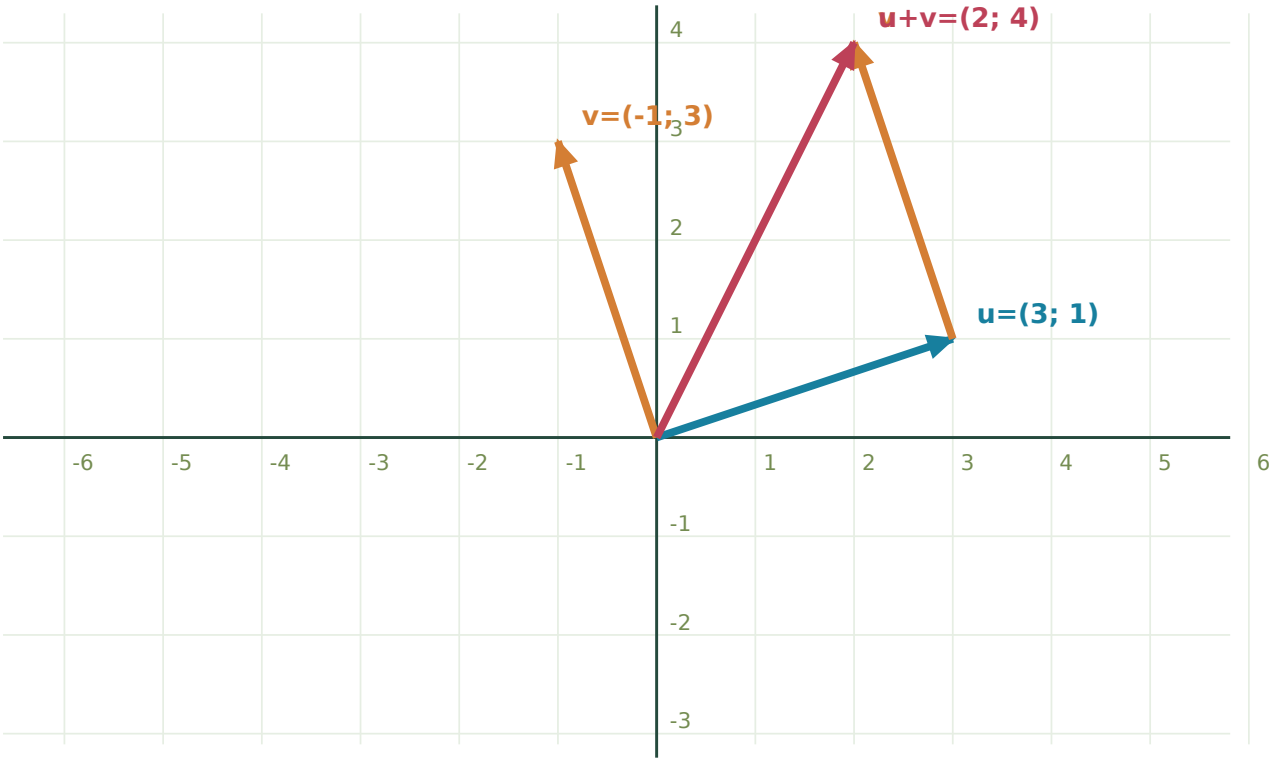
Цель урока — научиться видеть вектор как направленное перемещение, уверенно находить его координаты и понимать правило параллелограмма.

1. Основные определения

Вектор AB — направленный отрезок из A в B. Его координаты: AB = (xB − xA; yB − yA). Свободный вектор можно переносить параллельно самому себе: направление и длина не меняются.

2. Действия с векторами

Для u=(ux; uy), v=(vx; vy): u+v=(ux+vx; uy+vy), u−v=(ux−vx; uy−vy), ku=(k·ux; k·uy). Сложение отвечает последовательному перемещению; вычитание — перемещению в обратном направлении.



На рисунке u=(3; 1), v=(−1; 3). Следовательно, u+v=(2; 4). Оранжевая стрелка от конца синего вектора — перенесённая копия v.

3. Три разобранных примера

Пример 1. A(−2; 1), B(3; 5). Найти AB. Вычитаем координаты начала из координат конца: AB=(3−(−2); 5−1)=(5; 4). Важно не перепутать AB и BA.

Примеры, проверка и самостоятельная работа

Пример 2. u=(4; 1), v=(−2; 3). Найти u−v. Сначала меняем знак v: −v=(2; −3), затем складываем: u−v=(4+2; 1−3)=(6; −2). Геометрически это стрелка от конца v к концу u, если их начала совпадают.

Пример 3. ABCD — параллелограмм, A(1; 1), B(4; 2), D(0; 4). Найдите C. Имеем AB=(3; 1), AD=(−1; 3), поэтому C=A+AB+AD=(1+3−1; 1+1+3)=(3; 5). Проверка: DC = AB и BC = AD.

4. От идеи к формуле

В параллелограмме ABCD противоположные стороны равны как векторы: AB=DC и AD=BC. Поэтому AC=AB+AD, а для точек C=B+D−A. Центр диагоналей — середина AC и BD.

5. Скалярное произведение и перпендикулярность

u·v = ux·vx + uy·vy. Если оба вектора ненулевые, то они перпендикулярны тогда и только тогда, когда u·v=0. Квадрат длины: $|u|^2=ux^2+uy^2$. Например, для u=(3; 4) имеем $|u|^2=25$ и |u|=5.

6. Типичные ошибки

• Переставили начало и конец: BA = −AB. • Складывают длины вместо координат: |u+v| обычно не равно |u|+|v|. • При умножении на отрицательное число забывают изменить направление. • В параллелограмме вычисляют C=B+D, забывая вычесть A. • Не различают нулевой вектор и отсутствие решения.

7. Практика

Откройте интерактивную лабораторию на сайте mehmatik.ru/lab/vectors. Изменяйте векторы и выполните 50 задач в пяти вариантах. На отдельном листе представлены задания для печати. Все упражнения открытые, оценки в журнал не записываются.

Итоги: вектор — перемещение, его координаты задают изменение каждой координаты. Сложение и вычитание можно понимать и на чертеже, и через формулы.