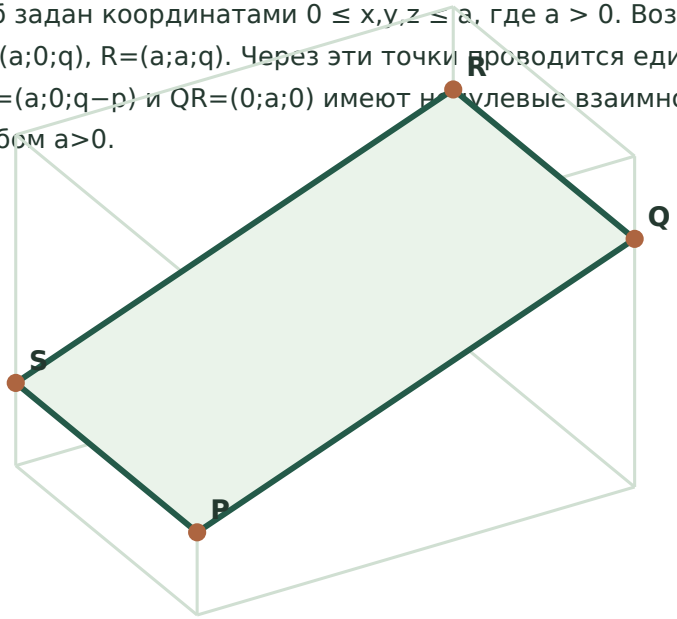
Метод следов и проектирование сечения

10 класс · Углублённая стереометрия · Почему работают построения и формулы

Цель. Построить сечение куба не на глаз, а из принадлежности точек граням. Затем исследовать, как связаны истинная площадь сечения, площадь проекции и объём под секущей плоскостью.

1. Геометрическая модель

Куб задан координатами $0 \le x,y,z \le a$, где $a > 0$. Возьмём $0 \le p,q \le a$ и точки $P=(0;0;p)$, $Q=(a;0;q)$, $R=(a;a;q)$. Через эти точки проводится единственная плоскость: векторы $PQ=(a;0;q-p)$ и $QR=(0;a;0)$ имеют ненулевые взаимно перпендикулярные направления при любом $a>0$.



Грани куба и следы плоскости PQRS (аксонометрия, не масштабная линейка).

2. Как метод следов восстанавливает четвёртую точку

След на грани — часть линии пересечения секущей плоскости с плоскостью грани. На передней грани $y=0$ след PQ. На правой грани $x=a$ след QR. Поскольку QR направлен вдоль оси y, наша плоскость содержит все прямые через её точки, параллельные оси y. Поэтому на задней грани $y=a$ ей принадлежит $S=(0;a;p)$.

Почему не может появиться пятая сторона? Пересечение плоскости с выпуклым кубом выпукло, а все её пересечения с четырьмя боковыми гранями уже образуют замкнутый контур PQRS. На верхней и нижней гранях дополнительные стороны не возникают (при $p=0$ или $q=a$ возможны граничные совпадения).

3. Откуда берётся площадь

PQ и QR перпендикулярны: PQ·QR = a·0+0·a+(q−p)·0 = 0. Противоположные стороны параллельны, поэтому PQRS — прямоугольник. По Пифагору $PQ^2=a^2+(q-p)^2$; QR=a. Площадь — произведение соседних сторон.

$$S = a\cdot\sqrt{[a^2+(q-p)^2]}$$

Здесь a — размер основания, q−p — изменение высоты между левой и правой гранями. Чем больше абсолютный перепад высоты при фиксированном a, тем длиннее наклонная сторона, а значит, больше настоящая площадь.

4. Проекция сечения: почему появляется cos φ

Опустим из каждой точки прямоугольника PQRS перпендикуляр к основанию z=0. Координаты (x;y) сохраняются, z превращается в 0. Получается квадрат основания со стороной a, его площадь $S_{пр} = a^2$. Это именно **ортогональная проекция**, а не рисунок в перспективе.

Угол φ между секущей плоскостью и основанием — острый угол ($0° \le \varphi < 90°$). Из прямоугольного треугольника с катетами a и |q−p| получаем $\cos\varphi = a/\sqrt{[a^2+(q-p)^2]}$.

$$S_{пр} = S\cdot\cos\varphi;\ S = S_{пр} / \cos\varphi$$

Почему так? При вертикальном проектировании одно направление сечения, параллельное y, не меняет длины. Наклонная сторона PQ сокращается до горизонтальной длины a, в cos φ раз. Поэтому и площадь прямоугольника уменьшается в cos φ раз. **Важно:** это отношение относится к ортогональной проекции плоской фигуры; оно не позволяет без проверки утверждать, что проекция произвольного сечения покрывает всё основание куба.

Пример 1. Чёткое построение, а не угадывание

Пусть a=4, p=1, q=3. Передняя грань даёт след PQ, правая — QR. След на задней грани параллелен PQ и проходит через R, его другой конец S=(0;4;1). На левой грани получаем SP. Следы замкнуты.

$PQ=\sqrt{(4^2+2^2)}=2\sqrt{5}$, QR=4. Следовательно, $S=8\sqrt{5}\approx17{,}889$, $P_{пер}=8+4\sqrt{5}\approx16{,}944$. Площадь проекции — 16, $\cos\varphi=2/\sqrt{5}$.

Пример 2. Горизонтальный случай

Если p=q=2, тогда PQ=(a;0;0). Сечение параллельно основанию: PQ=a, $S=a^2$, $\cos\varphi=1$. Формула остаётся верной без исключений; здесь плоскости совпадают по направлению и наклона нет.

Пример 3. Как найти высоту любой точки сечения

Так как при x=0 высота p, а при x=a высота q и след PQ прямолинеен, высота зависит от x линейно: $z=p+(q-p)x/a$. При a=4, p=1, q=3 и x=1 получаем $z=1+2\cdot1/4=1{,}5$. Координата y при этом может быть любой из отрезка [0,a].

5. Как появляется формула объёма

Под секущей плоскостью находится тело из вертикальных столбиков. Высота столбика в точке (x;y) равна z(x)=p+(q−p)x/a. При движении от x=0 к x=a высота линейно меняется от p до q. Средняя высота равна (p+q)/2. Проекция всего тела — квадрат площади a^2.

$$V_{под} = a^2 \cdot (p+q)/2$$

Почему усреднение работает строго? При фиксированном y сечение вертикальной плоскостью даёт трапецию с параллельными сторонами p и q, расстояние между ними a. Её площадь a(p+q)/2. Если протянуть трапецию вдоль оси y на расстояние a, получится искомое тело и объём a·a(p+q)/2.

Пример 4. Объём под наклонным сечением

При a=6, p=1, q=5 средняя высота равна 3. Основание имеет площадь 36, поэтому Vпод=36·3=108. Весь куб имеет объём 216; часть над плоскостью тоже имеет объём 108, поскольку p+q=a.

6. Что важно проверить прежде, чем считать

• **Условия существования:** a>0, 0≤p,q≤a. При этих условиях секущая плоскость пересекает куб по полному прямоугольнику, в том числе при p=0 или q=a.

• **Угол:** в формулах $\cos \varphi \geq 0$, а $\tan \varphi = |q-p|/a$. Не подставляйте знак q−p без модуля как величину острого угла.

• **Граница:** при p=q плоскость параллельна основанию. При p=q=0 или p=q=a сечение совпадает с нижней либо верхней гранью — это по-прежнему квадрат.

• **Главная ошибка:** площадь проекции a^2 — не то же самое, что истинная площадь наклонного сечения. Верно $S \geq a^2$, а равенство только при p=q.

• **Честное ограничение модели:** произвольная плоскость через три точки куба может дать треугольник, пятиугольник или шестиугольник. Прямоугольная модель v121 — разобранная доказательная конструкция, а не универсальный ответ на все сечения.

7. Самостоятельное исследование

Изменяйте p и q при постоянном a. Что произойдёт с площадью сечения, если поменять p и q местами? Почему объём тела под плоскостью при этом не изменится? Докажите оба утверждения по формулам и по геометрической симметрии.

Для дальнейших построений используйте лабораторию «Три точки» и её общую модель куба и пирамиды: /lab/three-point-section.

8. Три задачи с объяснением метода

Задача А. При $a=3$, $p=2$, $q=1$ найдите диагональ PR. Вектор $PR=(a;a;q-p)=(3;3;-1)$. Три направления взаимно перпендикулярны. Поэтому $PR^2=3^2+3^2+1^2=19$, $PR=\sqrt{19}$. Это не диагональ куба, а диагональ прямоугольного сечения.

Задача Б. При $a=5$, $p=0$, $q=4$ найдите площадь сечения и её проекции. $PQ=\sqrt{(5^2+4^2)}=\sqrt{41}$; $S=5\sqrt{41}$. Проекция на основание — квадрат со стороной 5 и площадью 25. Разность площадей положительна: наклон увеличивает реальную длину стороны PQ.

Задача В. Докажите, что объём под секущей плоскостью не превосходит объём куба. Так как $0\le p,q\le a$, то $(p+q)/2\le a$. Следовательно, $V_{под}=a^2(p+q)/2\le a^3$. Равенство возможно лишь при $p=q=a$: плоскость совпадает с верхней гранью.

Итоги

Строим следы на гранях и доказываем замыкание; вычисляем настоящие стороны прямоугольника по трём координатам; отдельно получаем проекцию; выводим площадь и объём из геометрического смысла. Формулы служат короткой записью доказанных закономерностей.

Упражнения

Пять самостоятельных вариантов по 10 задач: для каждого варианта указаны a, p, q. Ученический PDF не содержит ответов; подробные решения учителю доступны только в закрытом комплекте.

Связанные темы: теорема Пифагора в пространстве, скалярное произведение, ортогональные проекции, сечения по трём точкам.