Сечения по трём точкам

10 класс · Призма, куб и пирамида · Объяснение формул, пять разборов и исследование

Задача урока. Научиться строго строить все стороны пространственного сечения, отличать видимую проекцию от истинной формы, находить площадь и объяснять, почему полученная фигура полная.

1. Почему именно три точки?

Пусть P, Q, R — три точки пространства. Векторы PQ и PR определяют два направления. Если они не параллельны, через них проходит единственная плоскость. Вектор **n = PQ × PR** перпендикулярен обоим векторам; он называется нормалью.

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{P}) = 0$$

Здесь X — любая точка искомой плоскости; знак · означает скалярное произведение. Формула говорит: вектор PX не имеет составляющей вдоль нормали, то есть остаётся в той же плоскости. Это **описание всех её точек**, а не способ угадать фигуру по рисунку.

Если P, Q и R лежат на одной прямой, n = 0. Одного направления недостаточно: через прямую можно провести бесконечно много плоскостей. Сечение тогда не определяется единственным образом.

2. Как появляется след на грани?

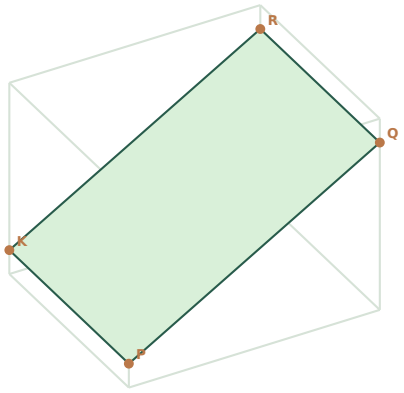
Каждая грань многогранника лежит в своей плоскости. Две несовпадающие непараллельные плоскости пересекаются по прямой. Часть этой прямой внутри грани — **отрезок следа**. Его концы лежат на рёбрах грани. Если секущая плоскость совпадает с плоскостью всей грани, сечение по данной грани следует рассматривать как целую фигуру, а не как произвольную диагональ.

Порядок построения: (1) проверить неколлинеарность P, Q, R; (2) найти точки пересечения плоскости с рёбрами; (3) соединить точки, принадлежащие одной грани; (4) проверить замыкание и отсутствие пропущенных сторон.

Почему этого достаточно? Для **выпуклого** многогранника пересечение с плоскостью выпукло. Вся его граница проходит по граням тела. Если перечислены все отрезки следов, дополнительных сторон быть не может. Для невыпуклого тела эта логика требует отдельных оговорок.

3. Пример 1. Наклонный прямоугольник в кубе

Рассмотрим куб 0 ≤ x,y,z ≤ 4. Выбраны P = (0; 0; 0,5), Q = (4; 0; 3,5), R = (4; 4; 3,5). Все три точки лежат на рёбрах и неколлинеарны.



Куб a = 4. Истинное сечение PQ R K — прямоугольник 5 × 4.

Шаг 1. **PQ = (4; 0; 3)**, **QR = (0; 4; 0)**. Их скалярное произведение равно нулю: 4·0 + 0·4 + 3·0 = 0. Значит, соседние стороны будущего сечения перпендикулярны.

Шаг 2. По Пифагору |PQ| = √(4² + 3²) = 5, |QR| = 4. Четвёртая точка K = P + QR = (0; 4; 0,5) тоже принадлежит ребру куба и плоскости PQR.

Шаг 3. Отрезки PQ, QR, RK, KP проходят по четырём боковым граням куба. Следы замыкаются, поэтому это полное сечение. Оно прямоугольное, хотя на перспективном рисунке его углы искажаются.

Площадь = 5·4 = 20; Периметр = 2(5 + 4) = 18

Смысл формулы площади. Здесь 5 и 4 — настоящие длины в секущей плоскости. Длина 5 появляется из горизонтального перемещения 4 и подъёма 3. Если измерять картинку линейкой, получится неверный результат.

4. Как измерить истинную фигуру?

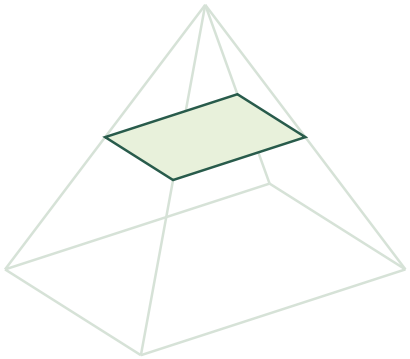
Возьмём в секущей плоскости единичный вектор u вдоль первой стороны и единичный вектор v, перпендикулярный u. Для каждой вершины X вычислим координаты ξ = (X − P)·u и η = (X − P)·v. Поскольку u и v ортонормированы, переход к (ξ; η) не меняет длины и площади.

$$S = \tfrac{1}{2}\,\left|\Sigma(\xi_i\eta_{i+1} - \xi_{i+1}\eta_i)\right|$$

Почему это работает? Выражение в скобках — удвоенная ориентированная площадь треугольника с вершинами в начале координат и двух соседних вершинах многоугольника. При обходе контура лишние области сокращаются, а внутренняя площадь остаётся. Модуль убирает зависимость от направления обхода.

5. Пример 2. Сечение пирамиды через середины рёбер

У правильной четырёхугольной пирамиды сторона основания a = 4, высота h = 4. P, Q, R — середины рёбер SA, SB, SC. Треугольники SPQ и SAB подобны с коэффициентом 1/2, поэтому PQ параллелен AB. Аналогично QR параллелен BC. Плоскость PQR параллельна плоскости основания: она пересекает и четвёртое ребро SD в его середине K.



Середины рёбер SA, SB, SC, SD образуют квадрат со стороной a/2.

Каждая сторона сечения вдвое меньше соответствующей стороны основания. Сечение — квадрат со стороной 2, площадью 4 и периметром 8. Это следствие подобия, а не визуального впечатления от чертежа.

Пример 3. Меняем положение параллельной плоскости

Пусть плоскость пересекает все четыре боковых ребра пирамиды на одной доле f их длины, считая от вершины S. Все линейные размеры сечения в f раз меньше основания: сторона af, периметр 4af. Площадь меняется **в f^2 раз**, потому что прямоугольник площади можно разбить на квадраты с обеими уменьшенными сторонами. Объём малого верхнего тела меняется **в f^3 раз**, поскольку уменьшается и высота.

$$\textbf{Сечение: } S = a^2f^2;\ P = 4af;\ V_{мал} = (a^2h/3)f^3$$

Здесь $0 < f < 1$, a — сторона основания, h — высота всей пирамиды. Не перепутайте f (долю ребра от вершины) и долю высоты от основания: вторая равна $1-f$.

Пример 4. Диагональное сечение прямой призмы

Прямоугольный параллелепипед имеет основание m×n и высоту h. Через диагональ основания и параллельные боковым рёбрам прямые проведена плоскость. По теореме Пифагора диагональ основания $d = \sqrt{(m^2+n^2)}$. Поскольку боковые рёбра перпендикулярны основанию, сечение — прямоугольник d×h.

$$S = h\sqrt{(m^2+n^2)}$$

Обоснование: одна сторона — пространственно вертикальное ребро высоты h, другая — диагональ основания. Эти направления перпендикулярны. Формулу нельзя без проверки переносить на наклонную призму.

6. Пример 5. Плоскость отсекает тетраэдр

В кубе с ребром не меньше a, b, c на трёх рёбрах из вершины O = (0;0;0) взяты точки A = (a;0;0), B = (0;b;0), C = (0;0;c), где a,b,c > 0. Секущая плоскость ABC имеет вид x/a + y/b + z/c = 1. Между координатными плоскостями она отсекает прямоугольный тетраэдр.

$$V = abc/6$$

Почему коэффициент 1/6? Основание OAB — прямоугольный треугольник площади ab/2. Высота к нему равна c. Объём пирамиды составляет треть произведения площади основания на высоту: (ab/2)·c/3 = abc/6. Коэффициент нельзя переносить на произвольные три отрезка, если они не перпендикулярны.

7. Граничные случаи и ошибки

Три коллинеарные точки. Через них нельзя однозначно задать плоскость. Рисовать «единственное сечение» неверно.

Сечение проходит через вершину многогранника. Эту вершину можно встретить на нескольких рёбрах, но в списке вершин многоугольника она должна учитываться один раз.

Секущая плоскость совпала с гранью. Сечение — вся грань, а не её диагональ. Следует учитывать совпадение плоскостей, а не пользоваться правилом пересечения по одной прямой.

Точка внутри стороны сечения. Три заданные точки могут не совпадать с тремя вершинами. Фигура восстанавливается по пересечениям с рёбрами и гранями.

Перспектива. На ней могут исказиться длины, углы, параллельность на рисунке. Вычисления выполняются по координатам в трёхмерной модели или по доказанным геометрическим свойствам.

8. Проверьте себя

1. Почему некорректно соединять P, Q, R и объявлять полученный треугольник сечением?

2. Чем способ построения по следам отличается от измерения сторон на изображении?

3. Почему при коэффициенте подобия 1/2 площадь уменьшается в 4 раза, а объём — в 8 раз?

4. Какая проверка обязательна, когда секущая плоскость проходит через вершину куба?

5. Для куба a = 4 и плоскости z = 2 найдите площадь сечения и докажите его форму.

9. Куда перейти дальше

Интерактивная лаборатория: **/lab/three-point-section**. Сечения прямой призмы: **/lesson-v94/g10-prism-sections-v94**. Сечения куба: **/lab/cube-sections**.

Итог. Сначала устанавливаем существование плоскости, затем находим все её следы на гранях, обосновываем полноту многоугольника и только потом вычисляем периметр и площадь. Каждый этап можно проверить независимо.