Сечения куба: увидеть, доказать, вычислить

10 класс • углублённая стереометрия • плоскость x+y+z=t в кубе [0;a]³

Цель урока

Научиться находить сечение как пересечение плоскости с настоящими рёбрами куба, строить его без ошибок перспективы и доказывать формулы длины, площади и периметра.

1. Что означает уравнение секущей плоскости

Возьмём куб с координатами 0≤x,y,z≤a. Уравнение x+y+z=t задаёт все точки, сумма координат которых равна t. Вектор (1;1;1) — нормаль: если P и Q принадлежат плоскости, то (Q−P)·(1;1;1)=0. Следовательно, направление от P к Q перпендикулярно нормали. При изменении t плоскость лишь параллельно перемещается.

Поскольку в кубе сумма координат лежит между 0 и 3a, сечение существует только при 0≤t≤3a. При t=0 и t=3a имеем по одной вершине, площадь равна нулю. Это вырожденные касания, а не обычные многоугольники.

2. Почему пересечение ищут именно на рёбрах

На любом ребре две координаты фиксированы и принимают 0 либо a, а третья меняется от 0 до a. Подстановка в x+y+z=t даёт единственную кандидатную точку. Только если меняющаяся координата действительно принадлежит [0;a], плоскость пересекает ребро. Чтобы получить полное сечение, проверяют все двенадцать рёбер и удаляют совпадающие вершины.

Пример: a=4, t=5. На ребре (x;4;0) получаем x+4=5, значит x=1 и точку (1;4;0). На ребре (x;0;0) получаем x=5>4: это точка продолжения ребра, её нельзя включать в сечение.

3. Три геометрических режима



Слева и справа — треугольные сечения; в середине — шестиугольник. Изображены истинные формы в плоскости сечения.

Если 0<t≤a, плоскость пересекает три рёбра, выходящие из начала координат: (t;0;0), (0;t;0), (0;0;t). При a<t<2a возникают шесть различных точек пересечения. При 2a≤t<3a сечение снова треугольное, но возле противоположной вершины.

4. Вывод площади: почему появляется √3/2

В первом режиме расстояние между (t;0;0) и (0;t;0) равно $\sqrt{(t^2+t^2)}=t\sqrt{2}$. Три стороны равны, поэтому треугольник равносторонний. Площадь равностороннего треугольника стороны s равна $\sqrt{3}\cdot s^2/4$: по высоте $s\sqrt{3}/2$ и формуле «половина основания на высоту». Подстановка $s=t\sqrt{2}$ даёт $S=\sqrt{3}\cdot t^2/2$.

$S = (\sqrt{3}/2)t^2$ $(0\le t\le a)$

В среднем режиме построим большой треугольник в положительном октанте с осевыми вершинами (t;0;0), (0;t;0), (0;0;t). От него нужно отсечь части, где одна координата превосходит a. Это три маленьких равносторонних треугольника, каждый со стороной $\sqrt{2}(t-a)$. Вычитаем их площади.

$S = (\sqrt{3}/2)[t^2 - 3(t-a)^2]$ $(a\le t\le 2a)$

При $t\ge 2a$ применим центральную симметрию куба: $(x;y;z)\mapsto(a-x;a-y;a-z)$. Она переводит уравнение $x+y+z=t$ в $x+y+z=3a-t$ и не меняет площадь. Поэтому верхний треугольник имеет формулу нижнего, если заменить t на $3a-t$.

$S = (\sqrt{3}/2)(3a-t)^2$ $(2a\le t\le 3a)$

5. Почему периметр может не меняться, хотя площадь меняется

При $a<t<2a$ шесть сторон идут попеременно: три стороны длиной $\sqrt{2}(t-a)$ и три стороны $\sqrt{2}(2a-t)$. Первая группа растёт, вторая убывает с точно такой же скоростью. Их сумма постоянна:

$P = 3\sqrt{2}(t-a) + 3\sqrt{2}(2a-t) = 3a\sqrt{2}.$

У границ $t=a$ и $t=2a$ три стороны становятся нулевыми: геометрически остаётся треугольник. Не следует говорить, что при границах сохраняется невырожденный шестиугольник. Хотя формула периметра остаётся верной, тип фигуры меняется.

6. Почему площадь наибольшая при t=3a/2

Среднюю формулу можно преобразовать выделением квадрата: $t^2-3(t-a)^2 = -2(t-3a/2)^2 + 3a^2/2$. Квадрат неотрицателен, поэтому максимум достигается при его обращении в нуль, то есть $t=3a/2$. Максимальная площадь равна $3\sqrt{3}a^2/4$. На крайних интервалах площади не превосходят $\sqrt{3}a^2/2$, что меньше этого максимума.

Три подробных примера

Пример 1. Куб $a=4$, $t=2$. Поскольку $0<t<a$, сечение треугольное. Его вершины (2;0;0), (0;2;0), (0;0;2), сторона $2\sqrt{2}$, площадь $2\sqrt{3}$, периметр $6\sqrt{2}$. Выбран метод координат, потому что он сразу доказывает принадлежность вершин рёбрам.

Пример 2. Куб $a=4$, $t=5$. Так как $4<t<8$, сечение — шестиугольник. Площадь равна $(\sqrt{3}/2)(25-3)=11\sqrt{3}$, периметр $3\cdot 4\sqrt{2}=12\sqrt{2}$. Мы не считаем площадь нарисованной тени: она зависит от угла обзора.

Пример 3. Куб a=4, t=6. Получаем t=3a/2 и вершины-перестановки (0;2;4). Стороны равны 2√2, а внутренние углы — 120°, следовательно, сечение правильное. Площадь 3√3·16/4=12√3. Формулу подтверждает разбиение на шесть равносторонних треугольников стороны 2√2.

Почему углы правильного шестиугольника равны 120°? При t=3a/2 возьмём P=(0;a/2;a), соседние вершины Q=(a/2;0;a) и R=(0;a;a/2). Тогда PQ=(a/2;−a/2;0), PR=(0;a/2;−a/2). Их скалярное произведение равно $-a^2/4$, а длины обеих сторон a/√2; следовательно, cos угла QPR = −1/2, угол QPR = 120°. Симметрия доказывает то же для остальных вершин. Это необходимо, поскольку один факт равенства шести сторон ещё не доказывает правильность шестиугольника.

Пример 4. Куб a=4, t=10. Вместо поиска всех точек заново используем симметрию: 3a−t=2. Значит, верхнее треугольное сечение конгруэнтно сечению t=2. Площадь 2√3, периметр 6√2. Это быстрее и надёжнее прямого перебора.

Типичные ошибки и контрольные вопросы

• Считают вершины по перспективе и пропускают задние рёбра. • Принимают точку на продолжении ребра за вершину сечения. • Переносят площадь плоской тени на реальное наклонное сечение. • Считают граничные случаи t=a и 2a шестигранными. • Путают формулы площади и периметра: площадь масштабируется как a^2, периметр — как a.

Проверка понимания: почему при t=3a/2 равенство шести сторон надо дополнить доказательством равенства углов? Почему S(t)=S(3a−t)? Почему P=3a√2 не означает неизменности площади?

Практика и продолжение

На сайте: /lab/cube-sections — интерактивная проверка 24 заданий и два чертежа; /lab/three-point-section — построение сечений по трём точкам; /lesson-v101/g10-cube-plane-sections-v101 — основная теория. Отдельный PDF содержит 5 разных вариантов по 10 заданий.