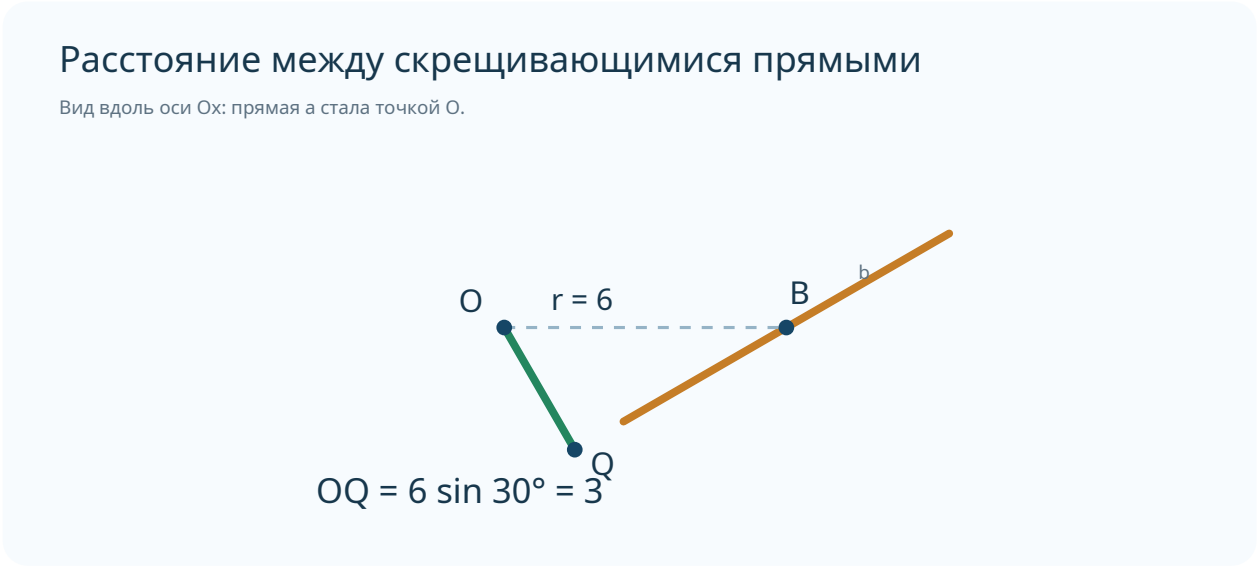
Расстояние между скрещивающимися прямыми

Подробный конспект: общий перпендикуляр, доказательство минимума, векторный метод.



Что означает расстояние?

Для прямых a и b ищем наименьшую длину PQ при P∈a, Q∈b. Для скрещивающихся прямых такая длина достигается общим перпендикуляром. Нельзя брать расстояние между случайными изображёнными точками.

Специальная удобная модель

Пусть a — ось Ox, а b задана B=(0;r;0) и направлением (0;cos ψ;sin ψ), где r>0 и 0°<ψ<180°. При взгляде вдоль Ox прямая a превращается в точку O, а b — в прямую плоскости yz. Перпендикуляр OQ в этом сечении имеет истинную длину.

d = r·|sin ψ|

Смысл: это доля смещения r, направленная поперёк второй прямой; продольная доля не увеличивает расстояние.

Вывод общей векторной формулы

Шаг 1. Пусть $a=A+t\,u$ и $b=B+s\,v$. Для скрещивающихся прямых u и v ненулевые и непараллельны, поэтому $n=u\times v\neq 0$.

Шаг 2. Вектор n перпендикулярен обоим направлениям. Изменение положения точек P и Q вдоль прямых не изменяет проекции вектора PQ на n, так как $u\cdot n=v\cdot n=0$.

Шаг 3. Любой отрезок по длине не меньше своей проекции на единичную нормаль $n/|n|$. Подходящими сдвигами вдоль u и v можно обнулить поперечные компоненты и оставить только направление n. Именно это — общий перпендикуляр.

$d(a,b) = |(B-A)\cdot(u\times v)| \,/\, |u\times v|$

Геометрическое объяснение дроби

Числитель — модуль смешанного произведения, то есть объём параллелепипеда на $B-A$, u, v. Знаменатель $|u\times v|$ — площадь основания на u и v. Объём/площадь = высота, то есть расстояние.

Когда нельзя применять

Если $u\times v=0$, направления параллельны: знаменатель нулевой. Для отрезков и рёбер требуется отдельная проверка, что основания общего перпендикуляра принадлежат именно отрезкам, а не их продолжениям.

Четыре подробных примера

Пример 1. Взаимно перпендикулярные направления

a={(t,0,0)}, b={(0,s,4)}. Общий перпендикуляр по оси Oz соединяет (0,0,0) и (0,0,4); d=4. Угол между направлениями прямых здесь 90°, но это не значит, что прямые пересекаются.

Пример 2. Сечение через поперечное направление

a={(t,0,0)}, b={(0,6,0)+s(0,√3/2,1/2)}. На виде вдоль Ox длина расстояния 6·sin30°=3. Не путайте с исходным расстоянием OB=6.

Пример 3. Смешанное произведение

A=(0,0,0), u=(1,1,0), B=(0,0,3), v=(0,1,1). Вычисляем u×v=(1,−1,1); |u×v|=√3, (B−A)·(u×v)=3. Следовательно d=3/√3=√3.

Пример 4. Параллельные направления

u=(1,0,0), v=(2,0,0), поэтому u×v=0. Подстановка в общую формулу дала бы деление на ноль. Сначала определите положение прямых, затем выберите формулу для параллельных прямых.

Ограничения и упражнения

Проверка взаимного положения

Если u×v≠0, прямые либо скрещиваются, либо пересекаются. Смешанное произведение равно нулю тогда и только тогда, когда B−A лежит в плоскости направлений u и v, то есть прямые компланарны и пересекаются. Если оно ненулевое, прямые скрещиваются.

Типичные ошибки

1) Путают расстояние между бесконечными прямыми и между конечными отрезками.
2) Не проверяют u×v≠0.
3) Забывают модуль: расстояние не может быть отрицательным.
4) В числителе ставят B−A, но затем забывают, что масштабирование u и v изменяет и числитель, и знаменатель одинаково.

Докажите сами

Пусть n=u×v. Для произвольных P=A+t u и Q=B+s v докажите, что (Q−P)·n=(B−A)·n. Объясните, почему это даёт нижнюю границу расстояния.

Исследовательский вопрос

В модели d=r|sin ψ| оставьте r=6 и меняйте ψ. Почему d максимально при 90°? Почему при ψ→0° прямые перестают скрещиваться, хотя формула ещё даёт предел?

Продолжение

В лаборатории /lab/dihedral-skew-v118 предусмотрено 12 открытых тренировочных заданий на точную геометрию. Самостоятельная работа — пять вариантов по 10 задач, от вычислений до доказательств.

Вывод

Общий перпендикуляр — не случайная конструкция: он удаляет любые компоненты перемещения вдоль обеих прямых и оставляет только неизбежный поперечный разрыв.