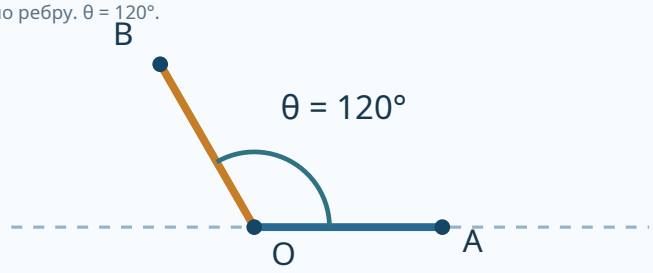
Двугранный угол: что именно мы измеряем

Подробный конспект: смысл, два определения угла, вывод формул, примеры и ошибки.

Двугранный угол: точное сечение

Сечение перпендикулярно ребру. θ = 120°.



Меньший угол полных плоскостей:

$\varphi = 60° = 180° - \theta$

Цель

Научиться проводить сечение, перпендикулярное ребру двугранного угла, и отличать линейный угол заданных полуплоскостей от меньшего угла между полными плоскостями.

Определение

Две полуплоскости с общим ребром образуют двугранный угол. Выбираем точку O на ребре; в каждой грани строим луч, перпендикулярный ребру. Угол между этими лучами — линейный угол θ двугранного угла. Он может быть тупым.

Почему не важен выбор O?

Два перпендикулярных сечения ребра параллельны. Перенос вдоль ребра переводит лучи одного сечения в лучи другого без изменения угла.

Откуда берутся формулы

Шаг 1. Сечение переводит пространственный вопрос в плоский. Пусть u и v — единичные векторы, направленные вдоль лучей сечения. Из определения скалярного произведения $u \cdot v = |u||v|\cos\theta$. Поэтому $\cos\theta = u \cdot v$.

$\cos\theta = (u \cdot v)/(|u||v|),\ 0° \le \theta \le 180°$

Шаг 2. Если говорим не о выбранных гранях, а о полных плоскостях, θ и 180°−θ описывают дополнительные пары полуплоскостей. Меньший угол φ всегда лежит между 0° и 90°.

$\varphi = \min(\theta, 180° - \theta)$

Шаг 3. Нормали n_1 и n_2 перпендикулярны соответствующим плоскостям. Их можно направить в любую сторону, не изменяя плоскость. Поэтому для меньшего угла берём модуль скалярного произведения.

$\cos\varphi = |n_1 \cdot n_2|/(|n_1||n_2|)$

Проверьте ограничения

Нормали должны быть ненулевыми. Для формулы через сечение лучи также ненулевые. Для параллельных или совпадающих плоскостей меньший угол равен 0°, но обычного ребра двугранного угла может не быть.

Геометрический смысл

Косинус характеризует совпадение направлений: $\cos\theta > 0$ для острого угла, $\cos\theta = 0$ для прямого, $\cos\theta < 0$ для тупого. Модуль в формуле нормалей стирает различие между выбранными направлениями нормалей.

Разбор четырёх примеров

Пример 1. Перпендикулярные грани

В сечении $u=(1;0)$, $v=(0;1)$. Тогда $u\cdot v=0$, $\cos\theta=0$, откуда $\theta=90°$. Проверка: оба луча поперечны ребру, следовательно угол измерен корректно.

Пример 2. Тупой двугранный угол

Для $u=(1;0)$, $v=(-1/2;\sqrt{3}/2)$ получаем $u\cdot v=-1/2$. Значит $\theta=120°$. Но меньший угол полных плоскостей $\varphi=\min(120°,60°)=60°$. Это два разных ответа на два разных вопроса.

Пример 3. Угол ската

На горизонтальный ход $3\sqrt{3}$ приходится подъём 3. В перпендикулярном ребру сечении $\tan\alpha=3/(3\sqrt{3})=1/\sqrt{3}$, следовательно острый угол $\alpha=30°$. Важно брать горизонтальную проекцию, не длину ската.

Пример 4. Нормали плоскостей

Для плоскостей $z=0$ и $x+z=0$ нормали $(0;0;1)$ и $(1;0;1)$. Скалярное произведение равно 1, длины 1 и $\sqrt{2}$. Поэтому $\cos\varphi=1/\sqrt{2}$ и $\varphi=45°$. Чтобы найти конкретный двугранный угол, надо дополнительно указать грани.

Проверяем понимание

Типичные ошибки

1) Угол на перспективном рисунке измеряют транспортиром: неверно, рисунок не сохраняет углы.
2) Автоматически заменяют θ=120° на 60°: нельзя без уточнения, какой угол требуется.
3) Берут cos φ без модуля при произвольных нормалях: знак может зависеть от выбора направления нормали.
4) Используют наклонный, а не перпендикулярный ребру разрез.

Задача на доказательство

Возьмите два разных сечения, перпендикулярных одному ребру. Объясните, почему соответствующие лучи параллельны, и докажите равенство линейных углов без измерений.

Задача на исследование

Постройте двугранные углы 45° и 135° при одних и тех же полных плоскостях. Чем отличаются выбранные грани и почему меньший угол плоскостей в обоих случаях равен 45°?

Где продолжить

Лаборатория /lab/dihedral-skew-v118 позволяет менять θ от 15° до 165°, наблюдать точное сечение и решать 12 открытых тренировочных задач. Печатная самостоятельная работа включает 5 вариантов по 10 задач.

Итог

Прежде чем подставлять числа, скажите: измеряем угол заданных полуплоскостей или меньший угол между полными плоскостями? Именно этот выбор определяет корректную формулу.