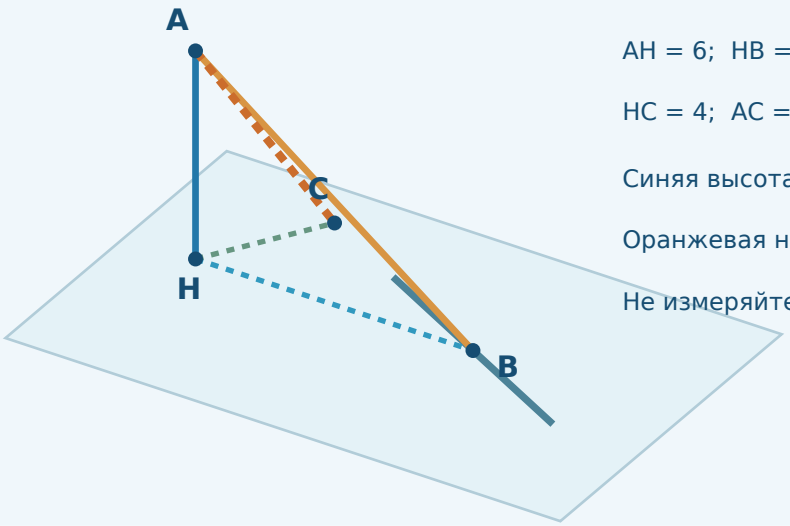
Угол прямой с плоскостью и расстояния

Цель: понимать, почему **два разных расстояния** — до плоскости и до прямой — требуют разных построений. Покажем происхождение формул, границы применимости и их связь с теоремой о трёх перпендикулярах.



AH = 6; HB = 8; β = 30°

HC = 4; AC = √52

Синяя высота — до плоскости.

Оранжевая наклонная — до l.

Не измеряйте углы на рисунке.

1. Что именно называют расстоянием?

Пусть AH перпендикулярна плоскости α, B лежит в α, а AB — наклонная. Для любой точки X плоскости треугольник AHX прямоугольный, поэтому $AX^2=AH^2+HX^2\geq AH^2$. Значит, расстояние от A до плоскости равно AH: это кратчайший путь. Расстояние от A до прямой l ищут только среди точек l; оно обычно больше.

2. Зачем здесь теорема Пифагора?

$AB^2 = AH^2 + HB^2 = h^2 + r^2$

h=AH — высота над плоскостью. r=HB — горизонтальная проекция AB. Эти отрезки взаимно перпендикулярны, потому что AH перпендикулярна всей плоскости. Таким образом, AB соединяет два независимых направления: подъём и перемещение по плоскости.

3. Угол между прямой и плоскостью

$\sin\varphi = h/AB$; $\cos\varphi = r/AB$; $\tan\varphi = h/r$ при $r>0$

φ — угол AB с её проекцией HB, если проекция ненулевая. Синус показывает долю подъёма; косинус — долю горизонтального перемещения; тангенс — отношение подъёма к горизонтальному пути. Если r=0 и h>0, угол равен 90°, тангенс не определён. Если h=0 и r>0, угол 0°. При h=r=0 отрезок AB вырождается и угол не определён.

4. Кратчайшее расстояние до прямой l

Пусть прямая l проходит через B в плоскости α. β — меньший угол между BH и l ($0°\le\beta\le90°$). Из H опустим перпендикуляр HC на l. В прямоугольном треугольнике HBC получаем $HC=r\cdot\sin\beta$. По теореме о трёх перпендикулярах AC также перпендикулярна l, поэтому AC — расстояние до прямой.

$AC^2 = AH^2 + HC^2 = h^2 + r^2\sin^2\beta$

Почему работает: $AH\perp HC$, так что треугольник AHC прямоугольный. Это не новая независимая формула: она дважды использует Пифагора/определение синуса. Почему именно AC — кратчайший? Для любой X на l из $AC\perp l$ имеем $AX^2=AC^2+CX^2\ge AC^2$.

Следствия: $AC\ge AH$. Если $\beta=0°$, прямая проходит через H и $AC=AH$. Если $\beta=90°$, $C=B$ и $AC=AB$. Угол β описывает направление l; угол φ описывает наклон AB. Их нельзя смешивать.

5. Четыре подробных примера

Пример 1. Наклонная и угол

AH=6, HB=8. По Пифагору $AB=\sqrt{36+64}=10$. $\sin\varphi=6/10=3/5$, $\cos\varphi=8/10=4/5$, $\tan\varphi=6/8=3/4$, $\varphi\approx36{,}87°$. Расстояние до плоскости 6, а длина наклонной 10: это разные величины.

Пример 2. Расстояние до прямой

AH=4, HB=6; $\beta=30°$. Сначала $HC=6\cdot\sin30°=3$. Затем $AC=\sqrt{4^2+3^2}=5$. Почему не 4? Основание H перпендикуляра к плоскости может не лежать на заданной прямой.

Пример 3. Пространственная диагональ

В параллелепипеде с рёбрами 3, 4, 12 диагональ имеет длину $\sqrt{9+16+144}=13$, её проекция на основание — $\sqrt{9+16}=5$. Поэтому $\sin\varphi=12/13$, а $\tan\varphi=12/5$.

Пример 4. Разные ближайшие точки

Для P=(3;4;12) и плоскости z=0 ближайшая точка — (3;4;0), расстояние 12. Для оси Ox ближайшая точка — (3;0;0), расстояние $\sqrt{4^2+12^2}=4\sqrt{10}$. Выбор геометрического объекта изменяет ответ.

6. Формула расстояния до плоскости с нормалью

$d(P,\alpha) = |ax_0+by_0+cz_0+d| / \sqrt{(a^2+b^2+c^2)}$

Углубление. Пусть α: ax+by+cz+d=0, а n=(a;b;c) — ненулевой нормальный вектор. Для любой Q в α выражение $ax_0+by_0+cz_0+d$ равно n·(P−Q). Делим модуль скалярного произведения на длину n и получаем модуль проекции P−Q на нормаль — именно кратчайшее расстояние. Нельзя делить на ноль, поэтому требуется $a^2+b^2+c^2>0$.

Пример: P=(1;2;9), плоскость z=5. Тогда d(P,α)=|9−5|/1=4. Это совпадает с длиной вертикального перпендикуляра, что подтверждает геометрический смысл результата.

7. Типичные ошибки

• Подменять расстояние до прямой расстоянием до плоскости; сначала назовите объект, до которого ищете кратчайший путь.

• Использовать tanφ=h/r при r=0; в этом случае φ=90°, а тангенс не определён.

• Принимать видимый угол на косой проекции за истинный пространственный угол.

• Путать φ с углом к нормали: оба угла дополняют друг друга до 90°.

• Не доказывать, что выбранная точка C действительно даёт минимум расстояния.

8. Исследуйте самостоятельно

1. Зафиксируйте h=6, r=8. Увеличьте β от 0° до 90°: объясните изменение AC. 2. Сравните случаи h=0, r=0 и h=r=0. 3. Докажите AC≤AB и объясните случаи равенства. 4. Разберите направление u=(3;4;12) относительно плоскости z=0: найдите угол и поясните, почему важна длина горизонтальной проекции 5.

Онлайн: /lab/line-plane-distance-v117. **Самостоятельная работа:** пять разных вариантов по десять задач. Решения преподавателю находятся в отдельном непубличном комплекте.