САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

Теорема о трёх перпендикулярах · пять содержательно различных вариантов

Каждый вариант содержит 10 заданий: вычисления, интерпретацию формул, построение рассуждений и доказательство. Работа выполняется в тетради. Для задач 1–8 записывайте обоснование, не только ответ. Никаких ответов в ученическом PDF нет.

ВАРИАНТ 1 · задания 1–5

Обозначения для всех задач: AH ⊥ α; H и B лежат в плоскости α; B ≠ H. Отрезок AB — наклонная, HB — её ортогональная проекция. Если указано l, то l⊂α и B∈l.

1. Антенна над ровной площадкой. AH=3, HB=4, AH ⊥ α. Найдите AB. Объясните, почему это гипотенуза.

2. В другой конфигурации AB=13, HB=12. Найдите AH и поясните выбор корня.

3. Для первой конфигурации найдите sin φ, cos φ и tan φ, где φ — угол наклонной AB с α. Почему φ=∠ABH?

4. Прямая l⊂α проходит через B и l ⊥ HB. Найдите расстояния d(A,l), d(A,α) и сравните их.

5. Точка X∈l, BX=12. Найдите AX² при условии HB ⊥ l. Почему допустима теорема Пифагора?

ВАРИАНТ 1 · задания 6–10

6. Известно: $AB^2=25$, $AX^2=169$, $AB \perp BX$. Найдите BX и объясните, какая сторона гипотенуза.

7. Введены координаты A=(0;0;3), H=(0;0;0), B=(4;0;0). Прямая l через B имеет направление (q;2;0). Найдите q, если AB ⊥ l.

8. Повернём направленный отрезок BX в плоскости: угол между векторами HB и BX равен 60°, BX=12. Найдите $\Delta=AX^2-AB^2-BX^2$ и объясните знак.

9. Ученица утверждает: «Если l перпендикулярна наклонной AB, то l обязательно перпендикулярна всей плоскости α». Найдите ошибку.

10. Докажите прямую теорему о трёх перпендикулярах через теорему Пифагора.

Проверьте: названа ли теорема, указан ли прямой угол, выполнены ли условия применения формулы?

ВАРИАНТ 2 · задания 1–5

Обозначения для всех задач: AH □ α; H и B лежат в плоскости α; B ≠ H. Отрезок AB — наклонная, HB — её ортогональная проекция. Если указано l, то l⊂α и B∈l.

1. Смотровая площадка и дорожка. AH=5, HB=12, AH □ α. Найдите AB. Объясните, почему это гипотенуза.

2. В другой конфигурации AB=17, HB=15. Найдите AH и поясните выбор корня.

3. Для первой конфигурации найдите sin φ, cos φ и tan φ, где φ — угол наклонной AB с α. Почему φ=∠ABH?

4. Прямая l⊂α проходит через B и l □ HB. Найдите расстояния d(A,l), d(A,α) и сравните их.

5. Точка X∈l, BX=4. Найдите AX² при условии HB □ l. Почему допустима теорема Пифагора?

ВАРИАНТ 2 · задания 6–10

6. Известно: $AB^2=169$, $AX^2=185$, $AB \perp BX$. Найдите BX и объясните, какая сторона гипотенуза.

7. Введены координаты A=(0;0;5), H=(0;0;0), B=(12;0;0). Прямая l через B имеет направление (q;2;0). Найдите q, если $AB \perp l$.

8. Повернём направленный отрезок BX в плоскости: угол между векторами HB и BX равен 120°, BX=4. Найдите $\Delta=AX^2-AB^2-BX^2$ и объясните знак.

9. Почему в теореме важно требование $B \in l$? Что произойдёт, если прямая лежит в α, но проходит мимо B?

10. Докажите обратную теорему о трёх перпендикулярах через теорему Пифагора.

Проверьте: названа ли теорема, указан ли прямой угол, выполнены ли условия применения формулы?

ВАРИАНТ 3 · задания 1–5

Обозначения для всех задач: AH □ α; H и B лежат в плоскости α; B ≠ H. Отрезок AB — наклонная, HB — её ортогональная проекция. Если указано l, то l⊂α и B∈l.

1. Прямоугольный павильон. AH=8, HB=15, AH □ α. Найдите AB. Объясните, почему это гипотенуза.

2. В другой конфигурации AB=25, HB=24. Найдите AH и поясните выбор корня.

3. Для первой конфигурации найдите sin φ, cos φ и tan φ, где φ — угол наклонной AB с α. Почему φ=∠ABH?

4. Прямая l⊂α проходит через B и l □ HB. Найдите расстояния d(A,l), d(A,α) и сравните их.

5. Точка X∈l, BX=6. Найдите AX² при условии HB □ l. Почему допустима теорема Пифагора?

ВАРИАНТ 3 · задания 6–10

6. Известно: $AB^2=289$, $AX^2=325$, $AB \perp BX$. Найдите BX и объясните, какая сторона гипотенуза.

7. Введены координаты A=(0;0;8), H=(0;0;0), B=(15;0;0). Прямая l через B имеет направление (q;2;0). Найдите q, если AB ⊥ l.

8. Повернём направленный отрезок BX в плоскости: угол между векторами HB и BX равен 60°, BX=6. Найдите $\Delta = AX^2 - AB^2 - BX^2$ и объясните знак.

9. Что меняется, если H=B? Объясните, почему отношение AH/HB нельзя использовать.

10. В прямоугольном параллелепипеде $SA \perp (ABCD)$, $AB \perp BC$. Докажите $SB \perp BC$ и вычислите SC^2 через SA, AB, BC.

Проверьте: названа ли теорема, указан ли прямой угол, выполнены ли условия применения формулы?

ВАРИАНТ 4 · задания 1–5

Обозначения для всех задач: AH □ α; H и B лежат в плоскости α; B ≠ H. Отрезок AB — наклонная, HB — её ортогональная проекция. Если указано l, то l⊂α и B∈l.

1. Мачта у набережной. AH=7, HB=24, AH □ α. Найдите AB. Объясните, почему это гипотенуза.

2. В другой конфигурации AB=29, HB=21. Найдите AH и поясните выбор корня.

3. Для первой конфигурации найдите sin φ, cos φ и tan φ, где φ — угол наклонной AB с α. Почему φ=∠ABH?

4. Прямая l⊂α проходит через B и l □ HB. Найдите расстояния d(A,l), d(A,α) и сравните их.

5. Точка X∈l, BX=10. Найдите AX² при условии HB □ l. Почему допустима теорема Пифагора?

ВАРИАНТ 4 · задания 6–10

6. Известно: $AB^2=625$, $AX^2=725$, $AB \perp BX$. Найдите BX и объясните, какая сторона гипотенуза.

7. Введены координаты A=(0;0;7), H=(0;0;0), B=(24;0;0). Прямая l через B имеет направление (q;2;0). Найдите q, если $AB \perp l$.

8. Повернём направленный отрезок BX в плоскости: угол между векторами HB и BX равен 120°, BX=10. Найдите $\Delta=AX^2-AB^2-BX^2$ и объясните знак.

9. Почему расстояние от точки A до l обычно больше расстояния от A до α?

10. Докажите в координатах: $AH\perp\alpha$, $l\subset\alpha$ проходит через B, $l\perp HB \Rightarrow l\perp AB$.

Проверьте: названа ли теорема, указан ли прямой угол, выполнены ли условия применения формулы?

ВАРИАНТ 5 · задания 1–5

Обозначения для всех задач: AH □ α; H и B лежат в плоскости α; B ≠ H. Отрезок AB — наклонная, HB — её ортогональная проекция. Если указано l, то l⊂α и B∈l.

1. Вершина пирамиды над основанием. AH=20, HB=21, AH □ α. Найдите AB. Объясните, почему это гипотенуза.

2. В другой конфигурации AB=5, HB=4. Найдите AH и поясните выбор корня.

3. Для первой конфигурации найдите sin φ, cos φ и tan φ, где φ — угол наклонной AB с α. Почему φ=∠ABH?

4. Прямая l⊂α проходит через B и l □ HB. Найдите расстояния d(A,l), d(A,α) и сравните их.

5. Точка X∈l, BX=8. Найдите AX² при условии HB □ l. Почему допустима теорема Пифагора?

ВАРИАНТ 5 · задания 6–10

6. Известно: $AB^2=841$, $AX^2=905$, $AB \perp BX$. Найдите BX и объясните, какая сторона гипотенуза.

7. Введены координаты $A=(0;0;20)$, $H=(0;0;0)$, $B=(21;0;0)$. Прямая l через B имеет направление $(q;2;0)$. Найдите q, если $AB \perp l$.

8. Повернём направленный отрезок BX в плоскости: угол между векторами HB и BX равен $60°$, $BX=8$. Найдите $\Delta=AX^2-AB^2-BX^2$ и объясните знак.

9. Зачем в доказательстве пользоваться именно точкой $X \in l$, отличной от B?

10. Докажите, что при условиях прямой теоремы расстояние $d(A,l)=AB$ и сравните его с $d(A,\alpha)$.

Проверьте: названа ли теорема, указан ли прямой угол, выполнены ли условия применения формулы?