Теорема о трёх перпендикулярах

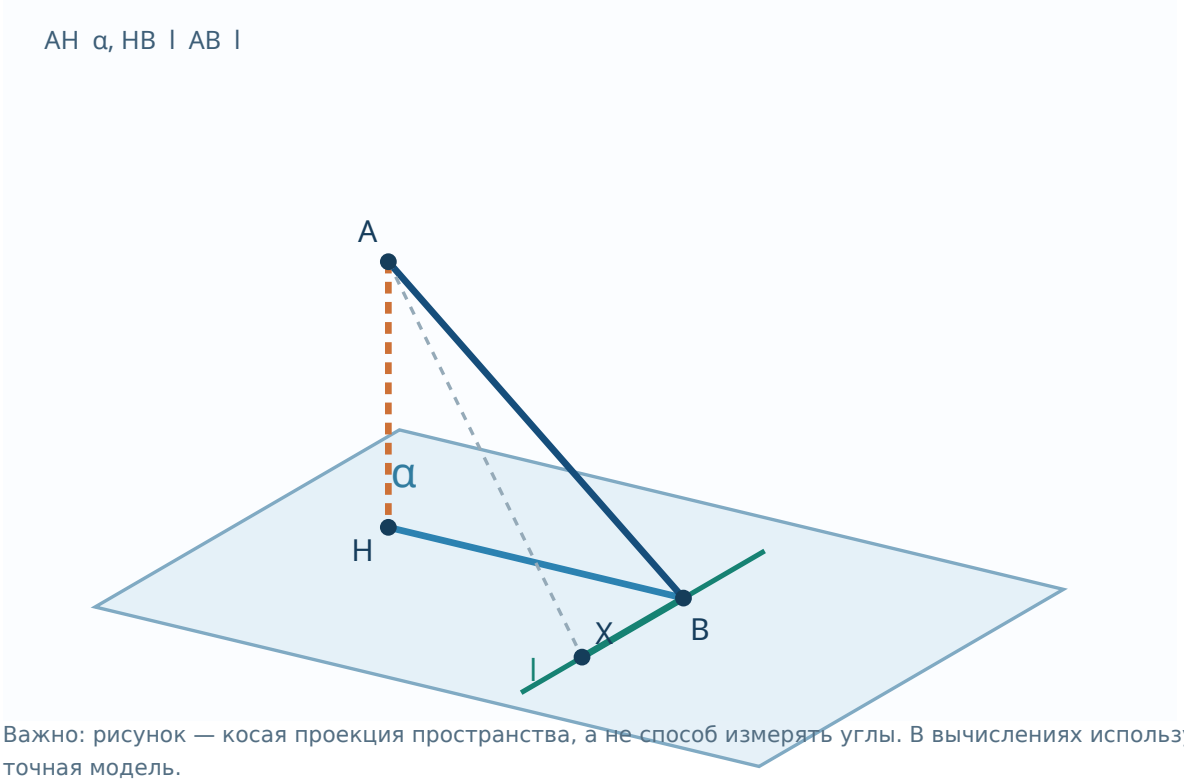
Почему направление «тени» определяет прямой угол в пространстве

Цель урока

Научимся различать перпендикуляр к плоскости, наклонную и её проекцию; докажем прямую и обратную теоремы и увидим, как теорема превращает пространственную задачу в плоскую.

1. Геометрическая ситуация

Пусть α — плоскость, A — точка вне её, AH ⊥ α и B ∈ α, причём B ≠ H. Отрезок AH есть перпендикуляр к плоскости, AB — наклонная, HB — ортогональная проекция наклонной на плоскость. Прямая l лежит в α и проходит через B.



Важно: рисунок — косая проекция пространства, а не способ измерять углы. В вычислениях используется точная модель.

2. Теорема и обратная теорема

Утверждение: если l лежит в плоскости, проходит через основание B наклонной AB и AH ⊥ α, B ≠ H, то l ⊥ HB тогда и только тогда, когда l ⊥ AB. Иными словами, если прямая перпендикулярна проекции наклонной, она перпендикулярна самой наклонной — и обратно.

3. Доказательство через Пифагора — по шагам

Выберем на l точку X, отличную от B. Поскольку AH ⊥ α, прямоугольны треугольники AHX и AHB. Поэтому

$$AX^2 = AH^2 + HX^2;\ AB^2 = AH^2 + HB^2.$$

Прямая теорема. Пусть HB ⊥ BX. Тогда в треугольнике HBX: HX² = HB² + BX². Подстановка даёт AX² = AH² + HB² + BX² = AB² + BX². Следовательно, по обратной теореме Пифагора угол ABX прямой; значит, AB ⊥ l.

Обратная теорема. Пусть AB ⊥ BX. Тогда AX² = AB² + BX². Подставим в равенство для AX² выражение AB² = AH² + HB². После сокращения AH² получим HX² = HB² + BX², поэтому HB ⊥ BX.

Главный смысл: квадрат общей высоты AH² сокращается. Условие прямого угла определяется горизонтальной составляющей наклонной, то есть её проекцией.

4. Формулы и физический смысл

AB² = AH² + HB² — теорема Пифагора в прямоугольном треугольнике AHB. Величина AB — длина наклонной, AH — вертикальное удаление от плоскости, HB — горизонтальная проекция. Если φ — угол наклонной с плоскостью, то φ=∠ABH, sin φ = AH/AB, cos φ=HB/AB, tan φ=AH/HB (последнее только при HB>0).

Если l ⊥ HB, то AB ⊥ l. Поэтому d(A,l)=AB, но d(A,α)=AH. Эти расстояния не равны, если HB>0: наклонная длиннее перпендикуляра.

5. Подробные примеры

Пример 1. AH=6, HB=8. Тогда AB²=36+64=100, AB=10. Для любой прямой l через B в плоскости, перпендикулярной HB, получаем d(A,l)=10. Расстояние же от A до самой плоскости составляет только 6.

Пример 2. В прямоугольном параллелепипеде SA⊥основанию ABCD, SA=4, AB=6, BC=8. Проекцией наклонной SB на основание служит AB. Поскольку BC⊥AB, по теореме BC⊥SB. В прямоугольном SBC: SC²=SB²+BC²=(4²+6²)+8²=116; SC=2√29.

Пример 3. A=(0;0;5), H=(0;0;0), B=(12;0;0), l через B направлена вектором (u;v;0). Если AB⊥l, то (12;0;−5)·(u;v;0)=12u=0. Поскольку B≠H, получаем u=0, то есть l направлена перпендикулярно HB. Это координатная проверка обратной теоремы.

Пример 4. AH=9, HB=12, AB=15. Угол φ между AB и α удовлетворяет sin φ=9/15=3/5, cos φ=12/15=4/5, tan φ=9/12=3/4. Из трёх отношений можно выбрать удобное: синус использует высоту, косинус — проекцию, тангенс — их отношение.

6. Граничные случаи и типичные ошибки

Если B=H, наклонная совпадает с перпендикуляром к плоскости, HB=0 не задаёт направления и тангенс угла не определён. Нельзя утверждать l⊥AB, если прямая l проходит мимо B: для пространственных прямых принципиально важно пересечение. Нельзя выводить равенство перпендикулярных углов из перспективного рисунка без доказательства.

7. Проверьте себя

1) Почему достаточно доказать HB⊥l? 2) Где использована обратная теорема Пифагора? 3) Почему d(A,l)=AB, но d(A,α)=AH? 4) Почему нельзя делить на HB при B=H? 5) Как доказать обратную теорему без координат?

8. Задачи для самостоятельного рассуждения

Задача А. Пусть AH=8, HB=15. Почему AB=17? На прямой l через B, перпендикулярной HB, выбрана точка X, BX=6. Найдите AX^2, объясняя оба применения теоремы Пифагора.

Задача Б. AH=5, AB=13. Найдите длину проекции HB и тригонометрические функции угла φ между наклонной и плоскостью. Поясните, какую часть прямоугольного треугольника описывает каждое отношение.

Задача В. Почему формулу tan φ=AH/HB нельзя применять к перпендикуляру, у которого B=H? Сформулируйте корректный геометрический смысл угла 90° между перпендикуляром и плоскостью.

Задача Г. Пусть линия l лежит в α, но не проходит через B. Её направление перпендикулярно HB. Достаточно ли этого, чтобы утверждать, что l и AB пересекаются под прямым углом? Найдите подходящую пространственную модель для контрпримера.

Задача Д. Докажите обратную теорему о трёх перпендикулярах вторым способом — через скалярное произведение векторов. Сравните этот подход с доказательством через теорему Пифагора.

9. Памятка: как распознать применимость теоремы

1) Сначала найдите плоскость α и основание H перпендикуляра AH. 2) Убедитесь, что наклонная AB имеет основание B, отличное от H. 3) Проведите её проекцию HB. 4) Проверьте, лежит ли рассматриваемая прямая l в α и проходит ли через B. 5) Только после этого используйте равносильность $l \perp HB \Leftrightarrow l \perp AB$. 6) Выберите нужный прямоугольный треугольник для вычислений.

Материалы: /lab/three-perpendiculars-v116 · самостоятельная работа (5 вариантов). Публичная тренировка не выставляет оценки и не сохраняет ответы учеников.