Теорема косинусов: Пифагор с поправкой на угол

Углублённый урок для 9–10 классов · версия v115

Цель: объяснить, откуда берётся член −2ab cos γ, а не просто подставлять числа в формулу.

1. Какая именно сторона находится по формуле?

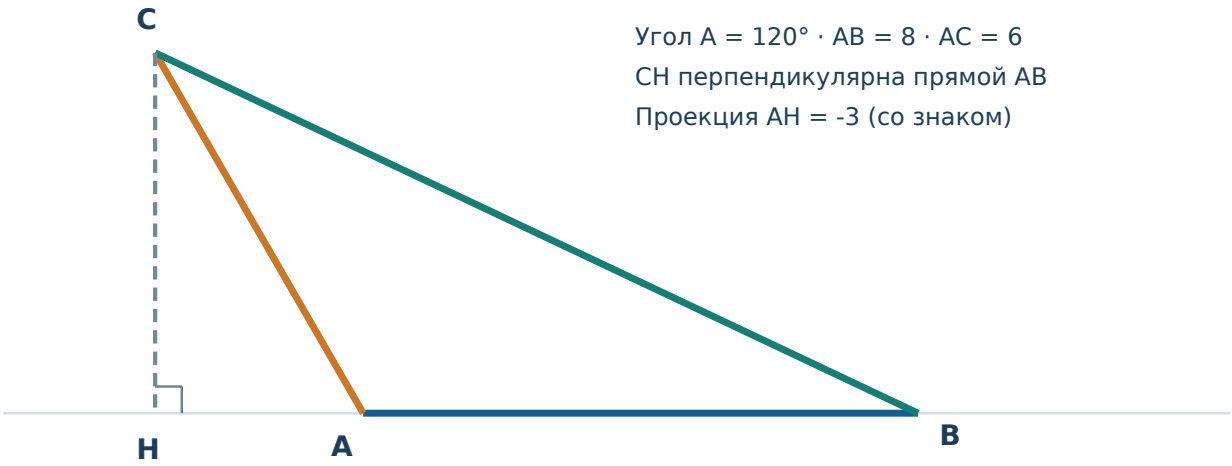
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

Стороны a и b образуют угол γ, а c лежит напротив него. Длины a,b,c положительны. Для невырожденного треугольника угол γ строго между 0° и 180°. Формула вычисляет сначала квадрат длины, поэтому для длины c нужен положительный квадратный корень.

При γ=90° косинус равен нулю, и формула превращается в теорему Пифагора. При остром угле косинус положителен, значит поправку вычитают; при тупом — косинус отрицателен, значит поправку прибавляют.

2. Доказательство через высоту

Пусть AB=b, AC=a. Опустим из C высоту CH на прямую AB. Обозначим положение H направленной координатой AH=a cos γ. Она отрицательна, если H лежит на продолжении AB за A. А высота всегда положительна: CH=a sin γ.



Квадрат горизонтальной составляющей $BH^2=(b-a\cos\gamma)^2$; квадрат высоты $CH^2=a^2\sin^2\gamma$. По Пифагору $c^2=BH^2+CH^2$.

Раскрываем: $c^2=b^2-2ab\cos\gamma+a^2\cos^2\gamma+a^2\sin^2\gamma$. Поскольку $\cos^2\gamma+\sin^2\gamma=1$, последние слагаемые дают a^2. Получаем $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$. Ни один шаг не требует, чтобы H находилась внутри AB.

Теорема косинусов: как понимать знак и размер ответа

3. Острый, прямой и тупой угол

При фиксированных a,b увеличение γ от 0° до 180° уменьшает cos γ от 1 до −1. Поэтому c^2 и c растут. При γ→0° получаем c→|a−b|, при γ→180° — c→a+b. В этих граничных положениях треугольник вырождается.

Пример 1. Найдите сторону c, если a=5, b=7, γ=60°

Шаг 1. Выбираем теорему косинусов: известны две стороны и угол именно между ними. Шаг 2. cos 60°=1/2. Шаг 3. $c^2=25+49-2\cdot5\cdot7\cdot(1/2)=39$. Шаг 4. $c=\sqrt{39}$ — положительный корень. Проверка: сторона действительно меньше $\sqrt{74}$, потому что угол острый.

Пример 2. Тупоугольный треугольник, a=6, b=4, γ=120°

cos 120°=−1/2. Тогда $c^2=36+16-2\cdot6\cdot4\cdot(-1/2)=76$ и $c=2\sqrt{19}$. Проверка другим способом: AH=6 cos 120°=−3 (со знаком); BH=4−(−3)=7; CH=6 sin 120°=$3\sqrt{3}$. Тогда $c^2=7^2+(3\sqrt{3})^2=49+27=76$.

Почему нельзя делать AH=3 вместо −3 в алгебраической формуле? Потому что −3 сообщает координату точки H на прямой AB. Обычная длина AH равна 3, но из неё без указания направления нельзя получить BH.

4. Обратная теорема: ищем угол по трём сторонам

$\cos\gamma = (a^2 + b^2 - c^2) / (2ab)$

Это та же теорема косинусов, решённая относительно cos γ. Но сначала убедитесь, что треугольник существует: сумма любых двух сторон строго больше третьей. Затем убедитесь, что полученный косинус в пределах [−1;1].

Пример 3. Угол между сторонами 3 и 8, если третья сторона равна 7

Неравенства треугольника выполняются. $\cos\gamma=(3^2+8^2-7^2)/(2\cdot3\cdot8)=(9+64-49)/48=24/48=1/2$. Для внутреннего угла $0°<\gamma<180°$ это γ=60°. Угол найден однозначно.

Смысл формулы: по тому, насколько c^2 больше или меньше a^2+b^2, мы судим о направлении сторон a,b и величине угла между ними.

Применение теоремы косинусов в пространстве

5. Почему плоская теорема работает для пространственных точек

Любые три неколлинеарные точки A, B, C в пространстве определяют плоскость. Внутри неё лежит треугольник ABC, поэтому для его сторон верна обычная теорема косинусов.

|BC|² = |AB|² + |AC|² − 2(AB·AC)

Здесь AB, AC и BC обозначают ВЕКТОРЫ, а вертикальные черты — их длины. Скалярное произведение AB·AC равно |AB||AC|cos ∠BAC. Поскольку BC=AC−AB, сумма квадратов координат вектора BC раскрывается как |AC|²+|AB|²−2(AB·AC). Это и есть координатное выражение закона.

В декартовых пространственных координатах u·v=uₓvₓ+u_yv_y+u□v□: складываются вклады вдоль трёх взаимно перпендикулярных осей одинакового масштаба.

Пример 4. Треугольник A(0;0;0), B(4;0;0), C(1;2;2)

AB=(4;0;0), AC=(1;2;2). Длины |AB|=4, |AC|=√(1+4+4)=3. Скалярное произведение AB·AC=4. Поэтому cos ∠BAC=4/(4·3)=1/3.

Теорема косинусов: BC²=4²+3²−2·4·3·(1/3)=17, значит BC=√17. Независимая проверка: BC=(−3;2;2), и |BC|²=9+4+4=17. Согласие двух вычислений помогает обнаружить ошибку.

6. Площадь через две стороны и угол

S = ab sin γ / 2

Высота из C на прямую AB равна a sin γ. Умножая её на основание b и деля пополам, получаем площадь. При 0°<γ<180° синус положителен, поэтому площадь положительна. Интересно: при γ=60° и γ=120° площади при тех же a,b совпадают, хотя третьи стороны различны.

7. Пять условий, которые нужно проверить

1) a и b положительны. 2) Для невырожденного треугольника 0°<γ<180°. 3) Используем именно угол между известными сторонами. 4) При трёх заданных сторонах проверяем строгие неравенства треугольника. 5) Если находим c, извлекаем положительный корень.

Предупреждение: если γ тупой, a cos γ отрицательно как подписанная проекция. Но геометрическая длина отрезка AH не бывает отрицательной.

Проверяем понимание

8. Контрольные вопросы и исследования

1. Почему при фиксированных a, b третья сторона c растёт вместе с углом γ? Объясните через косинус, не вычисляя чисел.

2. При γ=90° какой член исчезает из теоремы косинусов? Как получить обратное утверждение о прямом угле, если $c^2=a^2+b^2$?

3. Почему при γ=120° проекция AH может быть отрицательна, хотя длина отрезка AH всегда положительна?

4. Проверьте существование треугольника со сторонами 3, 4, 8. Покажите, что формальная попытка вычислить косинус приводит к значению вне [−1;1].

5. Почему пространственный треугольник всегда лежит в некоторой плоскости? Как это связано с теоремой косинусов?

6. В координатах A=(0;0;0), B=(4;0;0), C=(1;2;2) найдите BC сначала по разности координат, затем по теореме косинусов. Сравните.

9. Типичные ошибки

• Путают c и c^2. Ответ 39 вместо √39 — квадрат длины, а не длина.

• Используют не тот угол: в формуле γ должен лежать между a и b.

• При тупом угле считают cos γ положительным или теряют двойной минус.

• Называют отрицательную проекцию отрицательной «длиной». Длина неотрицательна; знак относится к направлению.

• Пытаются найти угол в несуществующем треугольнике, не проверив неравенство сторон.

10. Работа самостоятельно

К уроку подготовлено 5 разных вариантов по 10 заданий. Они начинаются с прямого применения теоремы, а затем переходят к высотам, площадям, координатам на плоскости, пространственным векторам, доказательствам и задачам с реальным смыслом.

После каждого ответа задавайте себе два вопроса: «Какую величину я получил?» и «Соответствует ли её знак или размер чертежу?»

Интерактивная версия: /lab/cosine-law-v115 · Теория в смежном разделе: /lesson-v114/g10-dot-projection