Скалярное произведение и проекция: от смысла к доказательству

9–10 классы · подробный конспект · версия 114

Цель: не заучить правила вычисления, а понять, какую часть одного вектора даёт другое направление, почему возникает косинус и как не потерять смысл отрицательного результата.

1. Что измеряет скалярное произведение

$a \cdot b = |a||b| \cos \varphi$

a и b — векторы; |a| и |b| — их длины; φ — угол между двумя ненулевыми векторами (от 0° до 180°); cos φ показывает согласованность направлений. Результат — число: положительное при остром или нулевом угле, ноль при прямом, отрицательное при тупом или развёрнутом угле.

Если a и b сонаправлены, cos φ = 1: оба целиком действуют вдоль одного направления. При перпендикулярности cos φ = 0: вдоль первого направления второй вектор не даёт составляющей. Если направления противоположны, cos φ = −1: вклад направлен назад.

Нулевой вектор: a·0 = 0, но угол с нулевым вектором не существует. Нельзя из нулевого произведения делать вывод о прямом угле, не проверив, что оба вектора ненулевые.

2. Подписанная проекция и основание перпендикуляра

$\text{пр}_a b = (a \cdot b)/|a|$ (если $a \neq 0$)

Направим прямую вдоль a. Из конца b опустим перпендикуляр на эту прямую. Число $\text{пр}_a b$ — подписанное перемещение до основания перпендикуляра: «вперёд» (+), «назад» (−), «не сдвинулись» (0). Это число имеет размерность длины.

$\text{proj}_a b = ((a \cdot b)/(a \cdot a)) \cdot a$ (если $a \neq 0$)

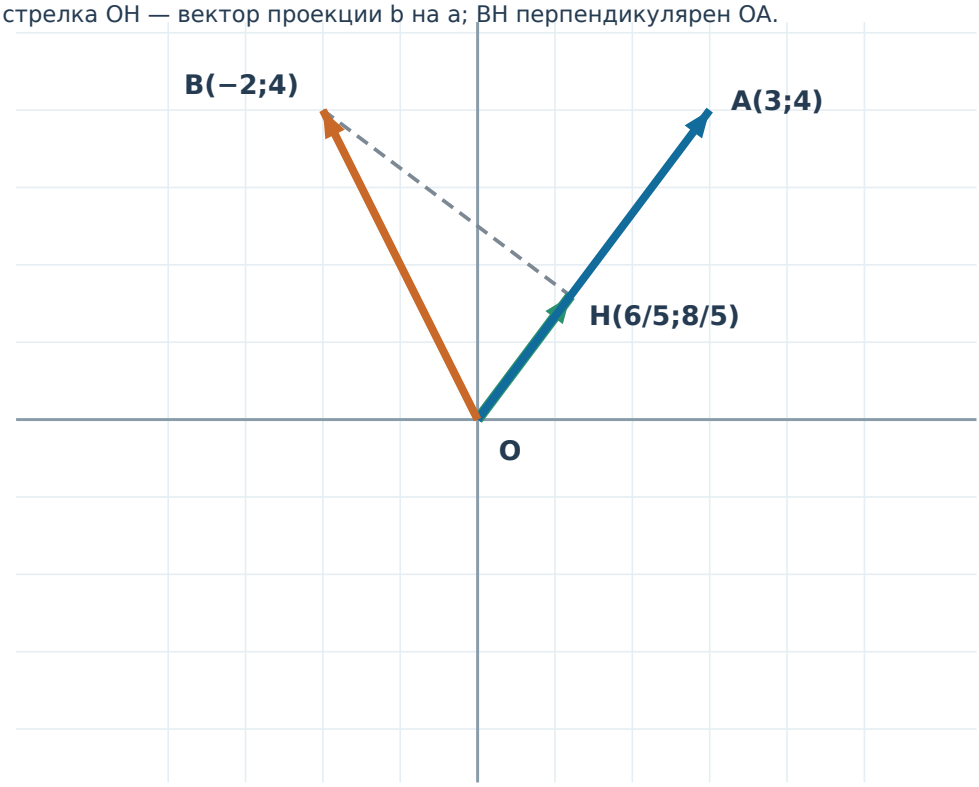
$\text{proj}_a b$ — вектор из начала к основанию перпендикуляра. Множитель (a·b)/(a·a) указывает, какая доля исходной стрелки a образует эту проекцию. Поскольку $a \cdot a = |a|^2$, знаменатель при $a \neq 0$ положителен.

Важно различать величины: a·b имеет размерность произведения длин; $\text{пр}_a b$ имеет размерность длины и может быть отрицательной; $\text{proj}_a b$ — вектор, у которого две координаты и направление. Например, для a=(3;4), b=(−2;4) получаем соответственно 10, 2 и (6/5;8/5).

Почему положительная проекция может встретиться у b с отрицательной x-координатой? Потому что положительное направление задаёт весь a=(3;4), а не одна ось x. Вклад вдоль направления a зависит от обеих координат и их совместного действия.

Геометрическая проверка формулы: отнимите от b найденную проекцию. Для примера $b - \text{proj}_a b = (-16/5; 12/5)$. Скалярное произведение с a равно $3 \cdot (-16/5) + 4 \cdot (12/5) = 0$: разность действительно перпендикулярна a, следовательно, основание H построено правильно.

Зелёная стрелка OH — вектор проекции b на a; BH перпендикулярен OA.



3. Почему координаты умножаются и складываются

В прямоугольной системе координат $|a-b|^2 = (a_x-b_x)^2+(a_y-b_y)^2$. Раскрываем скобки: получаем $|a|^2+|b|^2-2(a_xb_x+a_yb_y)$.

Теорема косинусов для того же треугольника даёт $|a-b|^2 = |a|^2+|b|^2-2|a||b|\cos\varphi$. Эти равенства описывают одну длину, поэтому $a_xb_x+a_yb_y = |a||b|\cos\varphi = a\cdot b$.

Сама теорема косинусов вытекает из Пифагора: если проекция одной стороны на другую имеет длину $b\cos\varphi$ со знаком, то квадрат третьей стороны содержит поправку $-2ab\cos\varphi$. При прямом угле эта поправка нулевая, и получается обычная теорема Пифагора.

4. Четыре разобранных примера

Пример 1: a=(3;4), b=(−2;4). a·b=3·(−2)+4·4=10; |a|=5. Подписанная проекция b на a равна 10/5=2. Вектор проекции равен (10/25)a=(6/5;8/5). Это смещение вперёд вдоль a, хотя у b отрицательная координата x.

Пример 2: a=(4;0), b=(−3;2). a·b=−12; |a|=4, значит проекция равна −3. Длина отрезка до основания перпендикуляра равна 3, а минус указывает направление против a.

Пример 3: a=(2;3), b=(−3;2). a·b=−6+6=0. Оба вектора ненулевые, значит cos φ=0 и угол 90°. Проекция b на a равна нулю: b направлен поперёк a.

Пример 4: сила 12 Н действует под углом 120° к перемещению 5 м. Работа W=12·5·(−1/2)=−30 Дж. Отрицательная работа означает, что составляющая силы вдоль перемещения направлена против него. Формула относится к постоянной силе и её перемещению.

5. Проверка условий и ошибки

Скалярное произведение возможно и с нулевым вектором, но угол между векторами определён только для ненулевых. Проекция на a требует $a \neq 0$. Координатная формула в таком виде требует прямоугольных осей. Не путайте скалярное произведение (число), подписанную проекцию (число) и вектор проекции (вектор). Отрицательным может быть значение подписанной проекции, а не длина отрезка.

Знак скалярного произведения не различает угол 0° от острого и угол 180° от тупого: он сообщает лишь, по одну ли сторону от перпендикулярного направления находится b. Чтобы уточнить угол, нужны дополнительные данные. Для ненулевых коллинеарных векторов возможны углы 0° или 180°.

Проверка ответов: после нахождения $\text{proj}_a b$ вычислите $a \cdot (b - \text{proj}_a b)$. Должен получиться ноль. После вычисления косинуса проверьте, что он находится в $[-1;1]$. После вычисления длины убедитесь, что она не отрицательна. В задачах про работу силы обязательно подпишите единицу измерения Дж.

Пример тонкой ошибки: $a=(0;0)$, $b=(1;1)$ дают $a \cdot b = 0$. Однако утверждение «угол 90°» ложно: у нулевого вектора вообще нет направления. Условие ненулевых векторов не формальность, оно защищает смысл самого угла.

6. Для самостоятельной работы

В пяти вариантах по десять задач идут последовательно: вычисления, знак угла, параметр перпендикулярности, проекция, вектор проекции, теорема косинусов, работа силы и доказательство. После каждого решения задавайте себе вопрос: что означает знак или величина ответа?

Исследование: зафиксируйте ненулевой a и найдите разные b с одной и той же проекцией на a. Объясните, почему добавление к b перпендикулярной составляющей не меняет $a \cdot b$.