Скалярное произведение: теория

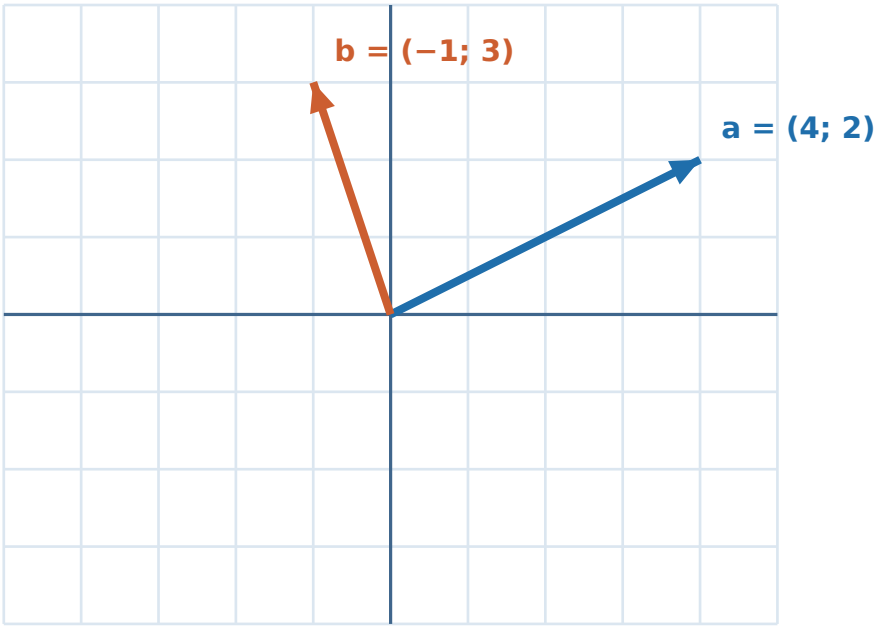
МЕХМАТИК · 9–10 классы · Скалярное произведение векторов

Определение и смысл

Для ненулевых a и b: $a \cdot b = |a||b| \cos \varphi = a_x b_x + a_y b_y$.

φ — угол между векторами от 0° до 180°.

$a \cdot b > 0$ — угол острый; $a \cdot b < 0$ — тупой; $a \cdot b = 0$ — прямой (последнее верно, только если оба вектора ненулевые).



На рисунке: $a \cdot b = 4 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 = 2$. Угол острый.

Почему работает координатная формула?

По теореме косинусов: $|a-b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b|\cos\varphi$.

Раскрытие квадратов координат даёт тот же результат, но с $-2(a_x b_x + a_y b_y)$.

Приравниваем последние слагаемые и получаем формулу.

Три примера

1) $(3; -2) \cdot (4; 5) = 12 - 10 = 2$.

2) $(2; 3) \cdot (-3; 2) = -6 + 6 = 0 \rightarrow$ векторы перпендикулярны.

3) $a = (1; 0)$, $b = (1; 1)$: $\cos\varphi = 1/\sqrt{2} \rightarrow \varphi = 45°$.

Типичная ошибка: произведение координат складывают ПОСЛЕ умножения.

Практикум: задания 1–10

МЕХМАТИК · 9–10 классы · Скалярное произведение векторов

Выполните вычисления. Для каждого задания запишите объяснение.

1. $\vec{a} = (3; 2)$, $\vec{b} = (2; 4)$. **Найдите $\vec{a} \cdot \vec{b}$.**

2. $\vec{a} = (2; -3)$, $\vec{b} = (4; 1)$. **Найдите $\vec{a} \cdot \vec{b}$.**

3. $\vec{a} = (-1; 4)$, $\vec{b} = (3; 2)$. **Найдите $\vec{a} \cdot \vec{b}$.**

4. $\vec{a} = (0; 5)$, $\vec{b} = (-2; 3)$. **Найдите $\vec{a} \cdot \vec{b}$.**

5. $\vec{a} = (4; 0)$, $\vec{b} = (-3; 2)$. **Найдите $\vec{a} \cdot \vec{b}$.**

6. $\vec{a} = (2; 3)$, $\vec{b} = (-3; 2)$. **Найдите $\vec{a} \cdot \vec{b}$.**

7. $\vec{a} = (1; 1)$, $\vec{b} = (-1; -1)$. **Найдите $\vec{a} \cdot \vec{b}$.**

8. $\vec{a} = (3; -2)$, $\vec{b} = (-1; 4)$. **Найдите $\vec{a} \cdot \vec{b}$.**

9. $\vec{a} = (5; 1)$, $\vec{b} = (2; -3)$. **Найдите $\vec{a} \cdot \vec{b}$.**

10. $\vec{a} = (2; -4)$, $\vec{b} = (-3; -1)$. **Найдите $\vec{a} \cdot \vec{b}$.**

При необходимости используйте координатную формулу $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$.

Практикум: задания 11–20

МЕХМАТИК · 9–10 классы · Скалярное произведение векторов

Выполните вычисления. Для каждого задания запишите объяснение.

11. $\vec{a} = (1; 2)$, $\vec{b} = (2; -1)$. **Найдите $\vec{a} \cdot \vec{b}$.**

12. $\vec{a} = (3; 3)$, $\vec{b} = (1; 0)$. **Найдите $\vec{a} \cdot \vec{b}$.**

13. $\vec{a} = (4; -1)$, $\vec{b} = (1; 4)$. **Укажите знак $\vec{a} \cdot \vec{b}$: +, − или 0.**

14. $\vec{a} = (0; -3)$, $\vec{b} = (0; 4)$. **Укажите знак $\vec{a} \cdot \vec{b}$: +, − или 0.**

15. $\vec{a} = (2; 2)$, $\vec{b} = (-2; 2)$. **Укажите знак $\vec{a} \cdot \vec{b}$: +, − или 0.**

16. $\vec{a} = (4; 3)$, $\vec{b} = (-4; -3)$. **Укажите знак $\vec{a} \cdot \vec{b}$: +, − или 0.**

17. $\vec{a} = (1; -5)$, $\vec{b} = (5; 1)$. **Перпендикулярны ли векторы? Обоснуйте.**

18. $\vec{a} = (2; 0)$, $\vec{b} = (0; -4)$. **Перпендикулярны ли векторы? Обоснуйте.**

19. $\vec{a} = (3; 4)$, $\vec{b} = (3; 4)$. **Перпендикулярны ли векторы? Обоснуйте.**

20. $\vec{a} = (5; 0)$, $\vec{b} = (-2; 0)$. **Перпендикулярны ли векторы? Обоснуйте.**

При необходимости используйте координатную формулу $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$.