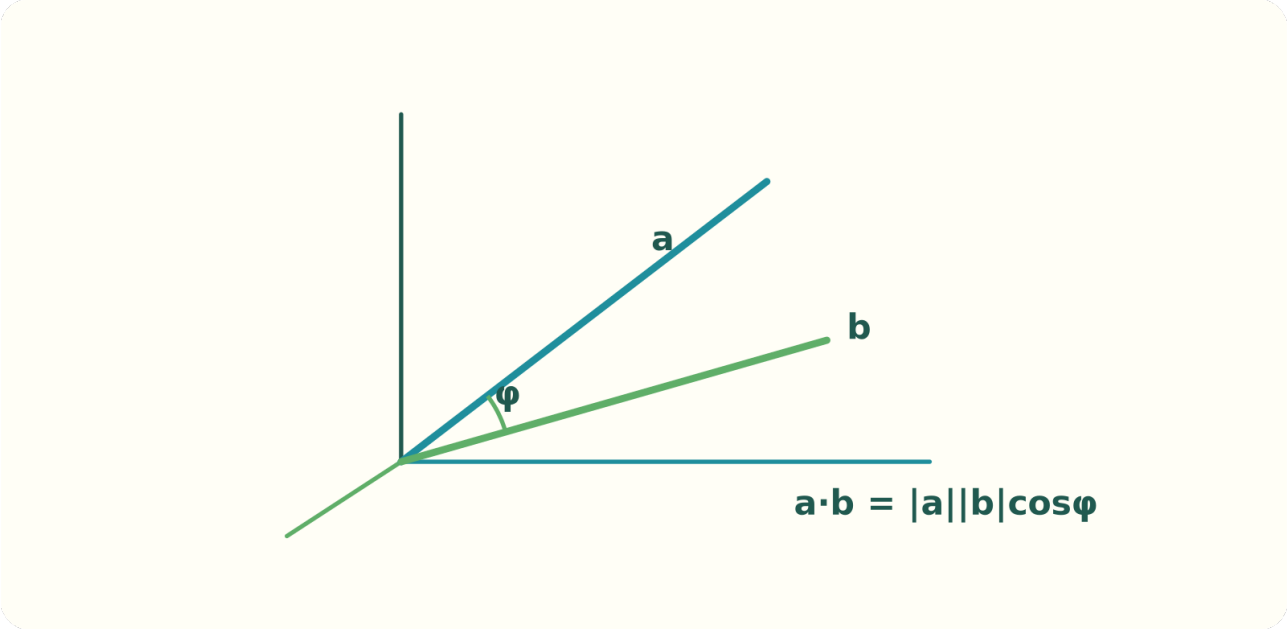
11 класс · геометрия · выпуск 21

Скалярное произведение в пространстве и углы

Главная идея

Для векторов $a=(a_1;a_2;a_3)$, $b=(b_1;b_2;b_3)$ скалярное произведение $a\cdot b=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$. Также $a\cdot b=|a||b|\cos\varphi$, где φ — угол между ненулевыми векторами. Следовательно, $\cos\varphi=(a\cdot b)/(|a||b|)$. Условие $a\perp b$ эквивалентно $a\cdot b=0$.



Доказательство и обоснование

Тождество $|a+b|^2=|a|^2+2a\cdot b+|b|^2$ следует из раскрытия $(a+b)\cdot(a+b)$ по распределительности. Сравнивая его с теоремой косинусов для треугольника векторов, получаем геометрическую формулу $a\cdot b=|a||b|\cos\varphi$. Координатное представление выводится через единичные взаимно перпендикулярные базисные векторы.

Порядок решения

1. Найдите координаты векторов, если исходно заданы точки.
2. Вычислите скалярное произведение — сумму трёх попарных произведений.
3. Для угла разделите на произведение длин ненулевых векторов.
4. Проверьте, что полученный косинус находится от -1 до 1.

На что обратить внимание

Нулевой скалярный продукт означает перпендикулярность только для ненулевых векторов; угол с нулевым вектором не определён.

Разобранные примеры

Пример 1. $a=(1;2;3)$, $b=(2;0;-1)$

$a\cdot b=2+0-3=-1$.

Пример 2. a=(1;1;0), b=(1;0;1)

a·b=1, |a|=|b|=√2; cosφ=1/2, φ=60°.

Пример 3. a=(1;2;z), b=(2;−1;3), a⊥b

2−2+3z=0 ⇒ z=0.