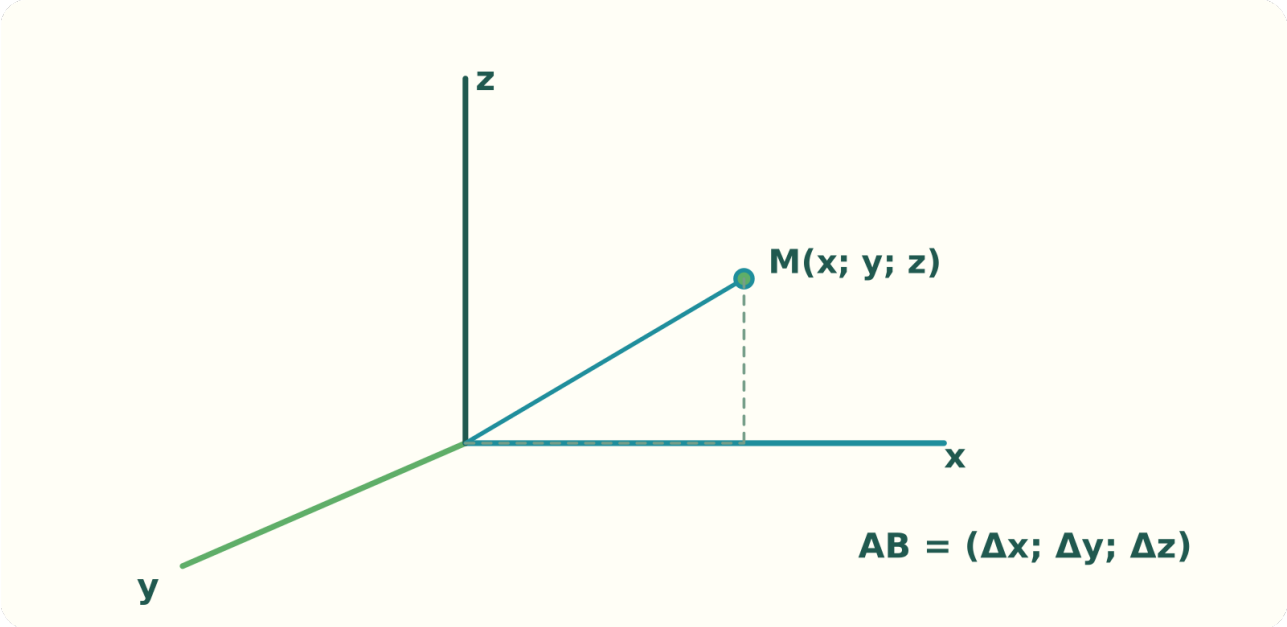
11 класс · геометрия · выпуск 21

Координаты и векторы в пространстве

Главная идея

Точка в прямоугольной системе координат задаётся тремя числами M(x;y;z). Для $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$ вектор $AB=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$. Его длина $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$. Середина отрезка имеет координаты $((x_1+x_2)/2;(y_1+y_2)/2;(z_1+z_2)/2)$.



Доказательство и обоснование

Формула расстояния получается из теоремы Пифагора дважды. Сначала проекция AB на плоскость Oxy имеет длину $\sqrt{(\Delta x^2+\Delta y^2)}$. Затем эта проекция и разность высот Δz образуют прямоугольный треугольник с гипотенузой AB. Значит $AB^2=\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2$.

Порядок решения

1. Для вектора AB всегда вычитайте координаты A из координат B.
2. При поиске длины возведите каждую координатную разность в квадрат.
3. Для середины усредните каждую координату отдельно.
4. Проверяйте ответы на простых частных случаях: оси и диагональ куба.

На что обратить внимание

Если перепутать порядок координат в AB, получится BA — вектор противоположного направления. Длина при этом останется прежней.

Разобранные примеры

Пример 1. A(1;2;3), B(4;6;3)

AB=(3;4;0), $|AB|=\sqrt{(9+16)}=5$.

Пример 2. A(0;2;4), B(4;6;0)

Середина M=(2;4;2).

Пример 3. Куб с ребром a

Его пространственная диагональ $d=\sqrt{(a^2+a^2+a^2)}=a\sqrt{3}$.