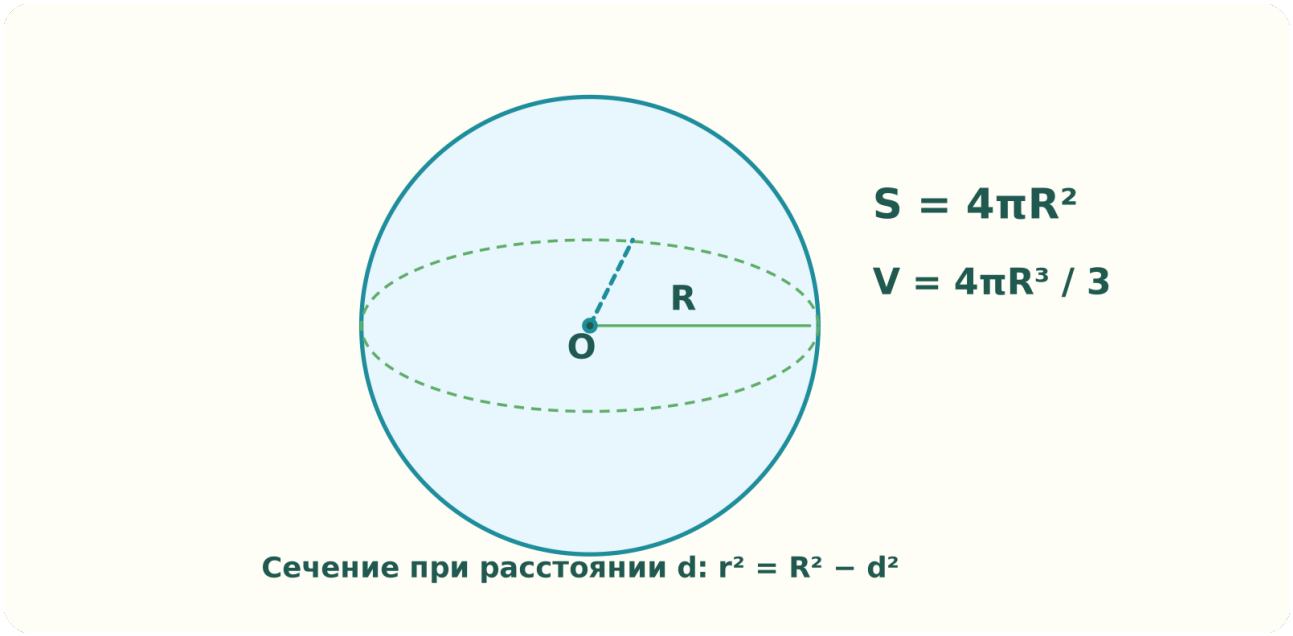
11 класс · геометрия · выпуск 21

Сфера и шар: сечения, площади и объёмы

Главная идея

Сфера — поверхность точек, равноудалённых от центра O на расстояние R; шар — сфера вместе с внутренними точками. Площадь сферы $S=4\pi R^2$, объём шара $V=(4/3)\pi R^3$. Если плоскость отстоит от O на расстояние $d\le R$, сечение шара является кругом радиуса $r=\sqrt{(R^2-d^2)}$; при $d=0$ получаем большой круг.



Доказательство и обоснование

Пусть H — основание перпендикуляра от центра O на секущую плоскость, A — любая точка окружности сечения. В треугольнике OHA угол при H прямой, $OA=R$, $OH=d$, $HA=r$. Поэтому $r^2=R^2-d^2$. Площадь сечения равна $\pi(R^2-d^2)$; наибольшая она при $d=0$.

Порядок решения

1. Отличите сферу (поверхность) от шара (тело).
2. Для площади/объёма используйте соответственно квадрат или куб радиуса.
3. В задаче на сечение найдите расстояние от центра до плоскости.
4. Проверьте условие $0\le d\le R$.

На что обратить внимание

Сечение шара плоскостью — круг, а сечение самой сферы той же плоскостью — окружность. Не путайте их площади.

Разобранные примеры

Пример 1. Сфера радиуса 3

$S=4\pi\cdot 9=36\pi$, $V=(4/3)\pi\cdot 27=36\pi$.

Пример 2. Шар радиуса 5, плоскость на расстоянии 3 от центра

$r=\sqrt{(25-9)}=4$, площадь круга сечения 16π.

Пример 3. Радиус увеличили вдвое

Площадь сферы увеличилась в 4 раза, объём шара — в 8 раз.