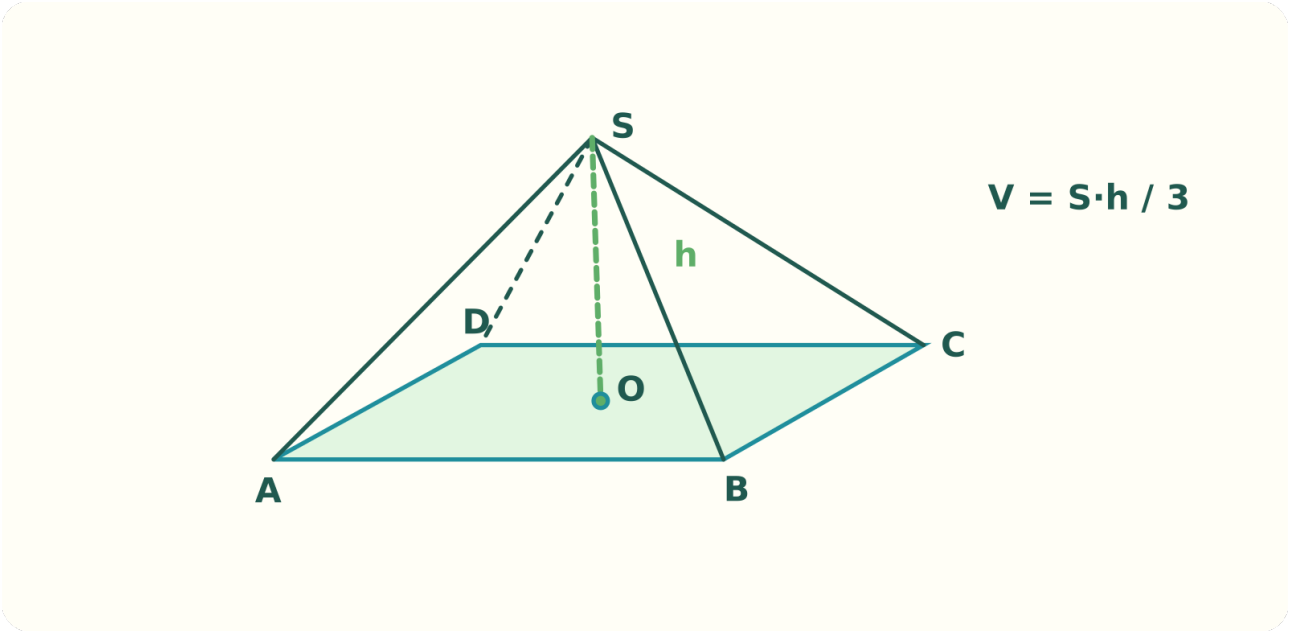
10 класс · геометрия · выпуск 21

Пирамиды: высота, апофема и объём

Главная идея

Пирамида состоит из многоугольного основания и боковых треугольных граней, сходящихся в вершине S. Высота h — перпендикуляр от S к плоскости основания. Объём пирамиды V=(1/3)Sосн·h. В правильной квадратной пирамиде вершина расположена над центром квадрата, а высота боковой грани называется апофемой.



Доказательство и обоснование

Три пирамиды подходящей конфигурации могут составлять призму, что приводит к коэффициенту 1/3 в объёме. Строгое доказательство для всех пирамид можно получить методом исчерпывания или принципом Кавальери, сравнивая площади параллельных сечений: они уменьшаются пропорционально квадрату расстояния от вершины.

Порядок решения

1. Найдите площадь многоугольника-основания.

2. Определите высоту от вершины перпендикулярно основанию.

3. Подставьте V=Sосн·h/3.

4. Для правильной пирамиды рассматривайте прямоугольные треугольники с высотой, половиной стороны и апофемой.

На что обратить внимание

Апофема боковой грани, боковое ребро и высота пирамиды — три разные величины.

Разобранные примеры

Пример 1. $S_{осн}=30$, $h=9$

$V=30\cdot 9/3=90$.

Пример 2. Правильная квадратная пирамида, $a=10$, $h=12$

Апофема $l=\sqrt{(12^2+5^2)}=13$.

Пример 3. Квадратное основание со стороной 6, $h=4$

$V=36\cdot 4/3=48$.