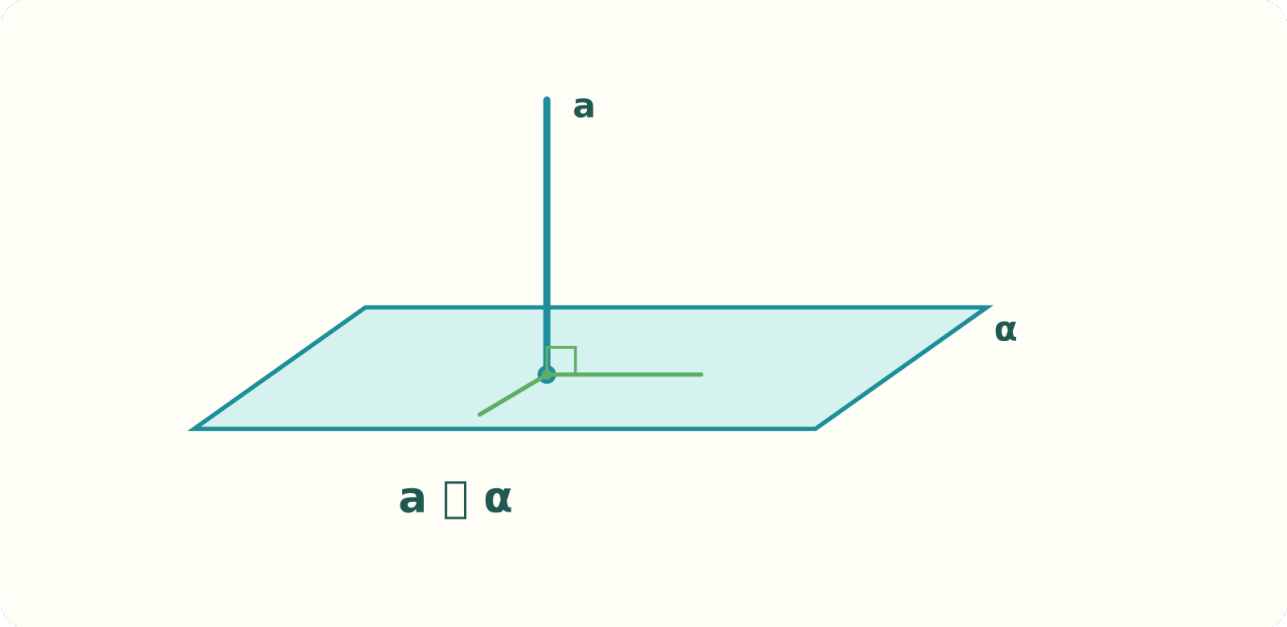
10 класс · геометрия · выпуск 21

Перпендикулярность прямой и плоскости

Главная идея

Прямая a перпендикулярна плоскости α, если она перпендикулярна каждой прямой в α, проходящей через точку пересечения a с α. Признак: достаточно проверить перпендикулярность двум пересекающимся прямым плоскости. Длина перпендикуляра от точки до плоскости — расстояние до плоскости.



Доказательство и обоснование

Объяснение признака на координатной модели: в плоскости α через O выберем пересекающиеся направления u и v. Если направляющий вектор a перпендикулярен и u, и v, то его скалярное произведение с любой комбинацией xu+yv равно нулю. Каждое направление плоскости представимо такой комбинацией; следовательно, a перпендикулярна каждому направлению в α. Это обоснование использует векторы; в синтетической геометрии признак доказывается отдельно.

Порядок решения

1. Найдите точку пересечения прямой с плоскостью.
2. Выберите две пересекающиеся прямые плоскости через эту точку.
3. Покажите перпендикулярность исследуемой прямой обеим.
4. Для длины наклонной применяйте теорему Пифагора к треугольнику с высотой.

На что обратить внимание

Перпендикулярность одной прямой, лежащей в плоскости, не даёт перпендикулярности всей плоскости.

Разобранные примеры

Пример 1. В прямоугольном параллелепипеде

Ребро AA_1 перпендикулярно AB и AD, значит $AA_1 \perp (ABCD)$.

Пример 2. Высота SO=12 и OA=5

В прямоугольном треугольнике SOA наклонная $SA=\sqrt{(12^2+5^2)}=13$.

Пример 3. Две прямые a и b перпендикулярны одной плоскости

Они параллельны друг другу: их направления совпадают с нормалью к плоскости.