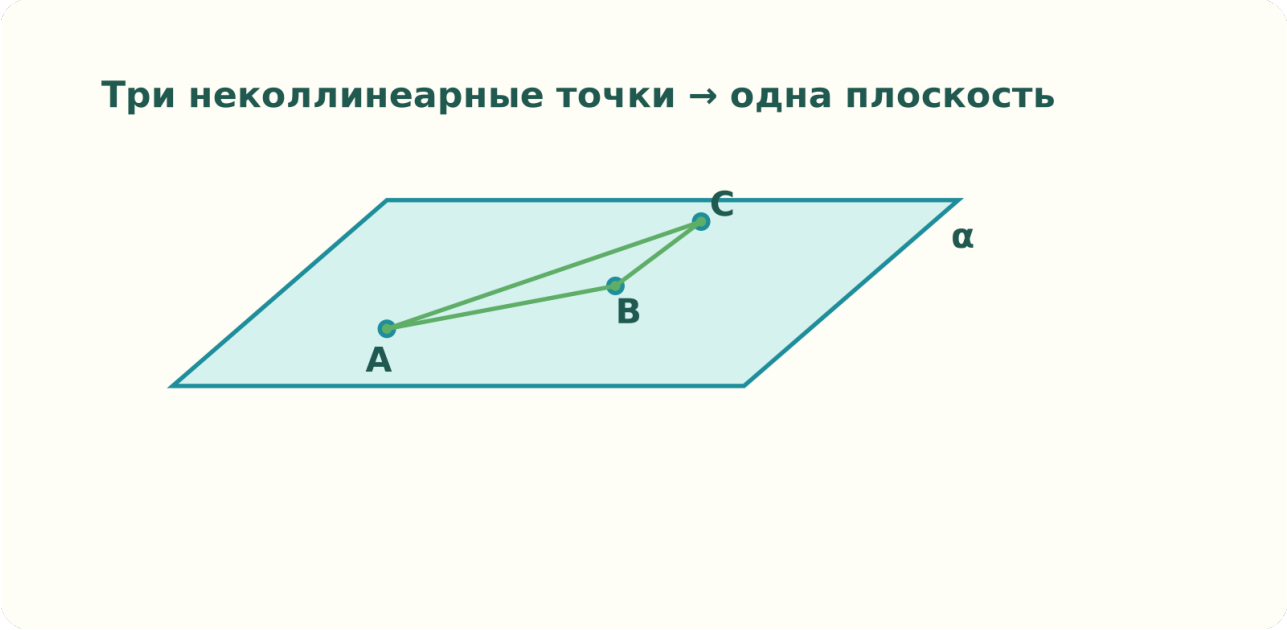
10 класс · геометрия · выпуск 21

Аксиомы стереометрии и следствия

Главная идея

В пространстве через три точки, не лежащие на одной прямой, проходит ровно одна плоскость. Если две точки прямой принадлежат плоскости, вся прямая лежит в ней. Если две различные плоскости имеют общую точку, они пересекаются по прямой. Эти утверждения — исходные аксиомы стереометрии.



Доказательство и обоснование

Следствие: через прямую a и точку P вне неё проходит ровно одна плоскость. Возьмём две различные точки A и B на a. Точки A, B, P не лежат на одной прямой, поэтому задают единственную плоскость α. По второй аксиоме вся прямая AB=a лежит в α. Любая другая плоскость, содержащая a и P, содержала бы те же три точки, а значит совпадала бы с α.

Порядок решения

1. Перечислите данные точки и прямые и проверьте, не лежат ли три точки на одной прямой.

2. Найдите аксиому, позволяющую определить плоскость или её пересечение с другой плоскостью.

3. Чётко различайте единственность плоскости и её существование.

4. Проверяйте, что на рисунке не сделаны недоказанные предположения о пересечениях.

На что обратить внимание

Три точки, лежащие на одной прямой, не определяют единственную плоскость: через эту прямую проходят бесконечно многие плоскости.

Разобранные примеры

Пример 1. Точки A, B, C не коллинеарны

По первой аксиоме через них проходит ровно одна плоскость.

Пример 2. A и B принадлежат α; M лежит на AB

По второй аксиоме AB целиком принадлежит α, поэтому M принадлежит α.

Пример 3. Плоскости α и β различны и содержат A и B

Обе содержат прямую AB. Если плоскости пересекаются, их общая линия — AB.