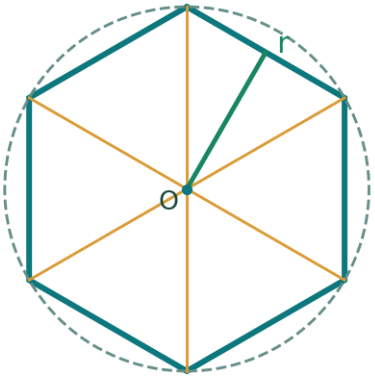
Геометрия · 9 класс · выпуск 20

Правильные многоугольники, радиусы и площади

1. Суть метода

Правильный n-угольник имеет равные стороны и равные внутренние углы. Если его периметр P, а r — апофема (радиус вписанной окружности), то S=Pr/2. Центральный угол между соседними вершинами равен 360°/n.



$$S = P \cdot r / 2$$

$$\alpha = 360° / n$$

2. Почему это верно

Доказательство формулы площади правильного многоугольника

Соединим центр O с вершинами правильного n-угольника. Он разобьётся на n равных равнобедренных треугольников с основанием a и высотой r. Площадь каждого ar/2, суммарная площадь n·ar/2=Pr/2, поскольку P=na.

3. Алгоритм решения

1. Найдите число сторон n и центральный угол 360°/n.

2. Определите сторону a, периметр P=na и апофему r.

3. Площадь вычисляйте по S=Pr/2.

4. Для правильного шестиугольника помните: сторона равна радиусу описанной окружности R.

Типичная ошибка

Апофема r — это не расстояние до вершины (радиус R). В формуле S=Pr/2 используется именно r.

4. Разобранные примеры

Пример 1. Правильный шестиугольник со стороной 3

Решение. P=18; центральный угол 60°, R=3.

Пример 2. Правильный квадрат со стороной 6

Решение. P=24, r=3, S=Pr/2=36.

Пример 3. Правильный шестиугольник со стороной 2

Решение. $S=6\cdot(\sqrt{3}\cdot 2^2/4)=6\sqrt{3}$.

Пример 4. Правильный восьмиугольник

Решение. Центральный угол 360°/8=45°; внутренний угол 135°.

5. Задачи для самостоятельной работы

Уровень А — базовый

1. Чему равен центральный угол правильного пятиугольника?

2. Чему равен центральный угол правильного шестиугольника?

3. Найдите периметр правильного девятиугольника со стороной 4 см.

Уровень Б — углублённый

4. Правильный квадрат имеет сторону 8 см. Найдите апофему.

5. Правильный многоугольник имеет периметр 30 см и апофему 4 см. Найдите площадь.

6. Правильный шестиугольник вписан в окружность R=5 см. Найдите его сторону.

Уровень В — математическая школа

7. Докажите, что сумма внутренних углов n-угольника равна $(n-2)\cdot 180°$.

8. У правильного многоугольника центральный угол равен 24°. Сколько у него сторон?