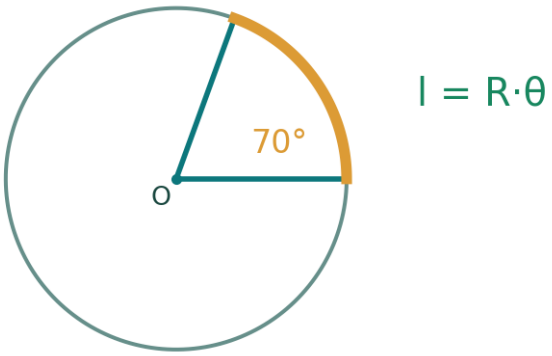
Геометрия · 9 класс · выпуск 20

Длина окружности, дуги и центральный угол

1. Суть метода

Длина окружности радиуса R равна C=2πR. Дуга, соответствующая центральному углу α градусов, составляет α/360 полной окружности, поэтому l=(α/360)·2πR. Если угол θ задан в радианах, l=Rθ.



2. Почему это верно

Почему длина дуги пропорциональна центральному углу

Равные центральные углы соответствуют равным дугам одной окружности, а полный угол 360° задаёт длину 2πR. По аддитивности длин дуг доля длины равна доле полного угла: l/C=α/360. Для радиан θ=πα/180 отсюда l=Rθ.

3. Алгоритм решения

1. Определите радиус R (не путайте с диаметром).

2. Определите единицы угла: градусы либо радианы.

3. Для градусов используйте l=(α/360)·2πR; для радиан — l=Rθ.

4. Проверьте: длина дуги не превосходит длину всей окружности при 0°≤α≤360°.

Типичная ошибка

Нельзя подставлять число градусов непосредственно в l=Rθ: формула требует радиан.

4. Разобранные примеры

Пример 1. R=5 см

Решение. C=2π·5=10π см.

Пример 2. R=6, угол 60°

Решение. l=(60/360)·12π=2π.

Пример 3. R=4, угол π/2 радиан

Решение. l=4·π/2=2π.

Пример 4. Дуга 3π при R=9

Решение. θ=l/R=π/3 радиан, то есть 60°.

5. Задачи для самостоятельной работы

Уровень А — базовый

1. R=7 см. Найдите длину окружности.

2. R=3 см, центральный угол 120°. Найдите длину дуги.

3. R=10 см, угол 90°. Найдите длину дуги.

Уровень Б — углублённый

4. R=5 см, угол π/3 радиан. Найдите длину дуги.

5. Окружность имеет длину 18π см. Найдите радиус.

6. Дуга длины 4π при R=8 соответствует какому углу в радианах?

Уровень В — математическая школа

7. Докажите, что дуга в 72° равна одной пятой окружности.

8. Два сектора одной окружности имеют углы 30° и 150°. Найдите отношение длин дуг.