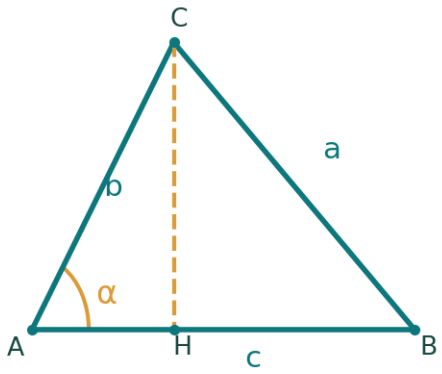
Геометрия · 9 класс · выпуск 20

Теорема косинусов: вычисления и доказательства

1. Суть метода

Для треугольника ABC со стороной a напротив угла A выполняется $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$. Если $A=90°$, формула превращается в теорему Пифагора. Для любого угла треугольника используется соответствующая сторона напротив него.



$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$$

2. Почему это верно

Вывод через проекцию на прямую основания

Положим $A=(0;0)$, $B=(c;0)$, $C=(b\cos A;b\sin A)$. Тогда $BC^2=(c-b\cos A)^2+(b\sin A)^2=c^2-2bc\cos A+b^2(\cos^2 A+\sin^2 A)=b^2+c^2-2bc\cos A$. Поскольку $BC=a$, получаем теорему косинусов.

3. Алгоритм решения

1. Назовите угол и лежащую напротив него сторону.

2. Запишите формулу для квадрата этой стороны.

3. Подставьте две другие стороны и косинус угла.

4. Извлеките положительный корень и проверьте неравенство треугольника.

Типичная ошибка

В теореме косинусов член $-2bc\cos A$ имеет знак «минус». При тупом A косинус отрицательный, и всё слагаемое становится положительным.

4. Разобранные примеры

Пример 1. $b=3$, $c=4$, $A=60°$

Решение. $a^2=9+16-24\cdot(1/2)=13$, поэтому $a=\sqrt{13}$.

Пример 2. $b=5$, $c=7$, $A=90°$

Решение. $a^2=25+49=74$, значит $a=\sqrt{74}$.

Пример 3. Стороны 3,4,5, напротив стороны 5 — угол A

Решение. $\cos A=(3^2+4^2-5^2)/(2\cdot3\cdot4)=0$; $A=90°$.

Пример 4. $b=c=6$, $A=120°$

Решение. $a^2=36+36-72\cdot(-1/2)=108$; $a=6\sqrt{3}$.

5. Задачи для самостоятельной работы

Уровень А — базовый

1. $b=4$, $c=6$, $A=60°$. Найдите a.

2. $b=5$, $c=12$, $A=90°$. Найдите a.

3. $b=c=4$, $A=60°$. Найдите a.

Уровень Б — углублённый

4. В треугольнике стороны $a=7,b=5,c=8$. Найдите $\cos A$.

5. Стороны $a=5,b=3,c=4$. Найдите угол A.

6. Стороны $b=5,c=7$, угол между ними $120°$. Найдите a^2.

Уровень В — математическая школа

7. Докажите: если A тупой, то $a^2>b^2+c^2$.

8. В параллелограмме соседние стороны имеют длины 3 и 4, угол между ними $60°$. Найдите более длинную диагональ.