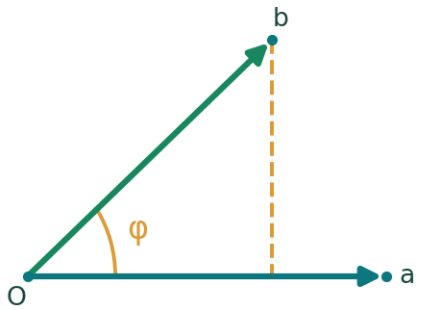
Геометрия · 9 класс · выпуск 20

Скалярное произведение и угол между векторами

1. Суть метода

Для векторов $a=(a_1;a_2)$ и $b=(b_1;b_2)$ скалярное произведение $a\cdot b=a_1b_1+a_2b_2$. Оно же равно $|a|\cdot|b|\cdot\cos\varphi$, где φ — угол между ненулевыми векторами. Ненулевые векторы перпендикулярны тогда и только тогда, когда $a\cdot b=0$.



$$a\cdot b = |a||b|\cos\varphi$$

2. Почему это верно

Почему скалярное произведение связано с косинусом

По теореме косинусов для треугольника со сторонами a, b и $a-b$: $|a-b|^2=|a|^2+|b|^2-2|a||b|\cos\varphi$. По координатам левая часть равна $(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2$; после раскрытия скобок получаем $a_1b_1+a_2b_2=|a||b|\cos\varphi$.

3. Алгоритм решения

1. Перемножьте одноимённые координаты и сложите.

2. Для перпендикулярности приравняйте скалярное произведение к нулю.

3. Для угла вычислите $\cos\varphi=(a\cdot b)/(|a||b|)$, если оба вектора ненулевые.

4. Проверьте, лежит ли результат $\cos\varphi$ между -1 и 1.

Типичная ошибка

Из равенства $a\cdot b=0$ нельзя заключать, что оба вектора ненулевые: нулевой вектор тоже даёт нулевое произведение, но угол с ним не определён.

4. Разобранные примеры

Пример 1. $a=(2;3)$, $b=(4;-1)$

Решение. $a\cdot b=2\cdot4+3\cdot(-1)=5$.

Пример 2. $a=(3;4)$, $b=(4;-3)$

Решение. $a\cdot b=12-12=0$, значит они перпендикулярны.

Пример 3. $a=(1;0)$, $b=(1;1)$

Решение. $\cos\varphi=1/(1\cdot\sqrt{2})=\sqrt{2}/2$, $\varphi=45°$.

Пример 4. $a=(-1;0)$, $b=(2;0)$

Решение. $a\cdot b=-2$, $\cos\varphi=-1$, $\varphi=180°$.

5. Задачи для самостоятельной работы

Уровень А — базовый

1. $a=(1;2)$, $b=(3;4)$. Найдите $a\cdot b$.

2. $a=(2;-1)$, $b=(1;2)$. Перпендикулярны ли они?

3. Найдите t, если $(t;3)$ перпендикулярен $(2;-4)$.

Уровень Б — углублённый

4. $a=(3;0)$, $b=(0;-7)$. Чему равен угол?

5. Вычислите $(-2;5)\cdot(3;-1)$.

6. Для $a=(1;1)$, $b=(1;-1)$ найдите косинус угла.

Уровень В — математическая школа

7. Докажите, что $a=(2;1)$, $b=(-1;2)$ перпендикулярны.

8. Два ненулевых единичных вектора имеют скалярное произведение $1/2$. Найдите угол между ними.