9 класс · расширенный урок · выпуск 18

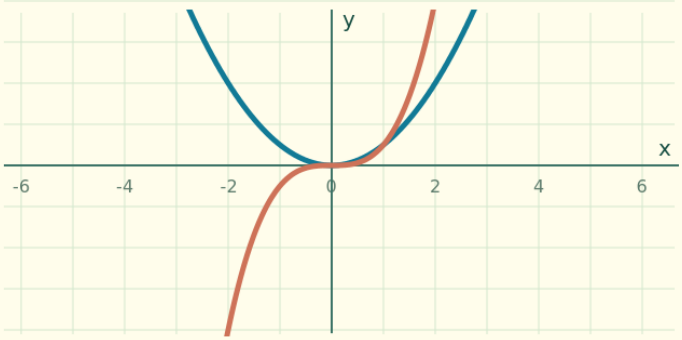
Степенная функция

Сравним графики $y=x^2$, $y=x^3$, $y=x^4$: степень определяет симметрию, направление изменения и поведение при отрицательных x.

Основная идея

Для натурального n функция $y=x^n$ определена на всей прямой. Если n чётное, $f(-x)=f(x)$, график симметричен относительно Oy. Если n нечётное, $f(-x)=-f(x)$, график симметричен относительно начала координат.

Чётные и нечётные степени



Синий: $y = x^2$ — чётная

Красный: $y = x^3$ — нечётная

$(-x)^2 = x^2$

$(-x)^3 = -x^3$

График x^2 симметричен относительно Oy, график x^3 — относительно начала координат

Почему это работает?

При чётном n произведение n одинаковых отрицательных множителей положительно, поэтому $(-x)^n=x^n$. При нечётном n знак отрицательного числа сохраняется: $(-x)^n=-x^n$. При положительных x функция x^n возрастает, а при чётной степени на отрицательной полуоси убывает.

Пошаговый алгоритм

1. Определите чётность показателя n.
2. Проверьте симметрию по $f(-x)$.
3. Найдите характерные точки: $x=-2,-1,0,1,2$.
4. Для чётной степени укажите минимум в нуле; для нечётной — возрастание на всей прямой.
5. По свойствам степени определите число решений уравнения $x^n=a$.

Типичная ошибка

Свойства x^2 и x^3 различаются: x^3 может принимать отрицательные значения, x^2 — нет. При чётной степени уравнение $x^n=a>0$ имеет два действительных решения.

Пять разобранных примеров

Пример 1. Вычислите $(-2)^3$

• Нечётное число отрицательных множителей даёт минус.

Ответ: -8

Пример 2. Вычислите $(-2)^4$

• Чётное число отрицательных множителей.

Ответ: 16

Пример 3. Решите $x^3=27$

• Куб — строго возрастающая функция.

Ответ: $x=3$

Пример 4. Решите $x^4=16$

• Четвёртая степень — чётная.

• $|x|=2$.

Ответ: $x=-2$ или $x=2$

Пример 5. Сравните $(-1{,}5)^3$ и $(-1{,}5)^2$

• Куб отрицателен, квадрат положителен.

Ответ: $(-1{,}5)^3 < (-1{,}5)^2$

Продолжение работы

Выполните самостоятельные задания трёх уровней. Ответы раскрываются на сайте после самостоятельной попытки; в печатном домашнем листе ответы отсутствуют. Тест доступен зарегистрированным пользователям после настройки October CMS.