9 класс · расширенный урок · выпуск 18

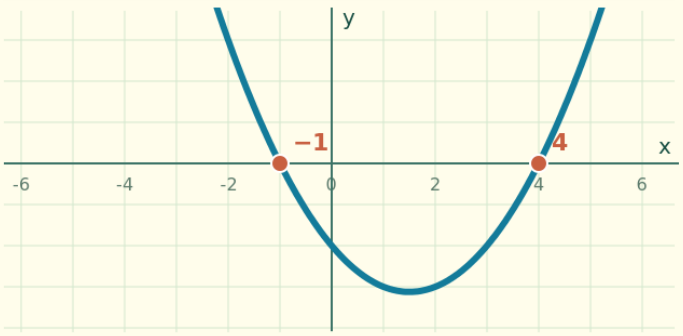
Решение квадратных неравенств

На графике параболы положительные и отрицательные значения функции видны сразу. Превратим эту наглядность в надёжный метод интервалов.

Основная идея

Для квадратного трёхчлена $a(x-r_1)(x-r_2)$ с двумя различными действительными корнями $r_1<r_2$ знак совпадает со знаком a снаружи промежутка $(r_1;r_2)$ и противоположен ему внутри. При строгом неравенстве корни исключаются.

Знаки квадратного трёхчлена



a > 0: знаки + − +

Выше Ox: $x < -1$; $x > 4$

Ниже Ox: $-1 < x < 4$

≤ 0 включает оба корня

Корни разбивают числовую прямую на промежутки постоянного знака

Почему это работает?

При $x<r_1$ оба множителя отрицательны, поэтому их произведение положительно; при $r_1<x<r_2$ множители разных знаков, произведение отрицательно; при $x>r_2$ оба положительны. Умножение на $a<0$ переворачивает все знаки. Тот же результат виден по расположению параболы относительно Ox.

Пошаговый алгоритм

1. Перенесите все слагаемые в одну часть так, чтобы справа был нуль.
2. Найдите действительные корни соответствующего уравнения.
3. Покажите корни на числовой прямой и определите знак на промежутках.
4. Выберите интервалы нужного знака.
5. При $\le$ или $\ge$ включите корни, при $<$ или $>$ исключите. При отсутствии корней изучите знак a.

Типичная ошибка

Нельзя автоматически включать корни при строгих знаках $<$ и $>$. Для отрицательного a знак вне промежутка между корнями отрицательный, а не положительный.

Пять разобранных примеров

Пример 1. $x^2-5x+6>0$

• Разложим: $(x-2)(x-3)>0$.

• Положительный знак снаружи корней.

Ответ: $(-\infty;2)\cup(3;+\infty)$

Пример 2. $x^2-5x+6\le 0$

• Между корнями 2 и 3 парабола ниже Ox.

• Поскольку знак нестрогий, включаем концы.

Ответ: $[2;3]$

Пример 3. $-x^2+4x-3\ge 0$

• Минус вынесем: $-(x-1)(x-3)\ge 0$.

• $(x-1)(x-3)\le 0$.

Ответ: $[1;3]$

Пример 4. $x^2+4>0$

• $x^2\ge 0$, поэтому $x^2+4>0$.

Ответ: все действительные x

Пример 5. $(x-2)^2<0$

• Квадрат не бывает отрицательным.

Ответ: решений нет

Продолжение работы

Выполните самостоятельные задания трёх уровней. Ответы раскрываются на сайте после самостоятельной попытки; в печатном домашнем листе ответы отсутствуют. Тест доступен зарегистрированным пользователям после настройки October CMS.