9 класс · расширенный урок · выпуск 18

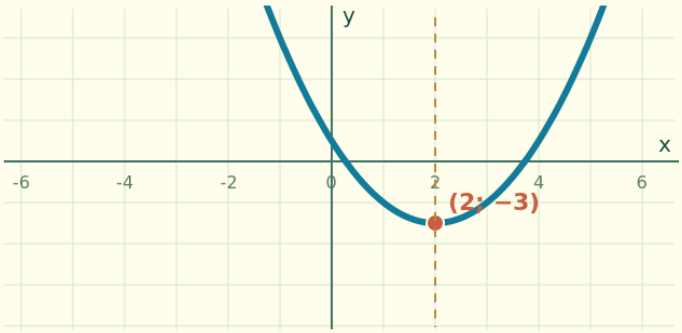
Квадратичная функция

Рассмотрим график $y=ax^2+bx+c$ как перенесённую и растянутую параболу. Свяжем его вершину с корнями и дискриминантом.

Основная идея

Для $a\neq 0$ вершина графика $y=ax^2+bx+c$ имеет абсциссу $x_0=-b/(2a)$, ординату $y_0=f(x_0)$. Если $a>0$, ветви направлены вверх и y_0 — минимум; если $a<0$, вниз и y_0 — максимум.

Вершина квадратичной функции



$y = (x - 2)^2 - 3$

Вершина (2; −3)

Ось симметрии $x = 2$

Минимум: −3

Приведение к виду $y = a(x - h)^2 + k$ показывает вершину $(h; k)$

Почему это работает?

Выделение полного квадрата даёт $f(x)=a(x+b/(2a))^2-D/(4a)$, где $D=b^2-4ac$. При $a>0$ первое слагаемое неотрицательно, поэтому минимум достигается в x_0. Кроме того, нули функции — это абсциссы пересечения параболы с осью Ox.

Пошаговый алгоритм

1. Определите знак a: направление ветвей.
2. Найдите абсциссу вершины $x_0=-b/(2a)$.
3. Вычислите $y_0=f(x_0)$ и запишите ось симметрии $x=x_0$.
4. Найдите корни $f(x)=0$ и пересечение с Oy $(0;c)$.
5. По опорным точкам постройте параболу и определите промежутки знака.

Типичная ошибка

Число $x_0=-b/(2a)$ — это абсцисса вершины, не обязательно корень уравнения. Вершину нельзя путать с пересечением Oy.

Пять разобранных примеров

Пример 1. $y=x^2-4x+1$

- $x_0=4/2=2$, $y_0=4-8+1=-3$.
- $f(x)=(x-2)^2-3$.

Ответ: вершина $(2;-3)$, минимум -3

Пример 2. $y=-x^2+6x-5$

- $x_0=-6/(-2)=3$; $y_0=-9+18-5=4$.

Ответ: вершина $(3;4)$, максимум 4

Пример 3. $y=2x^2-8x+6$

- $x_0=8/4=2$; $y_0=8-16+6=-2$.
- $2x^2-8x+6=2(x-2)^2-2$.

Ответ: вершина $(2;-2)$

Пример 4. Найдите нули $f(x)=x^2-5x+6$

- $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$.

Ответ: $x=2$ и $x=3$

Пример 5. Найдите минимальное значение x^2+2x+8

- $x^2+2x+8=(x+1)^2+7$.

Ответ: 7 при $x=-1$

Продолжение работы

Выполните самостоятельные задания трёх уровней. Ответы раскрываются на сайте после самостоятельной попытки; в печатном домашнем листе ответы отсутствуют. Тест доступен зарегистрированным пользователям после настройки October CMS.