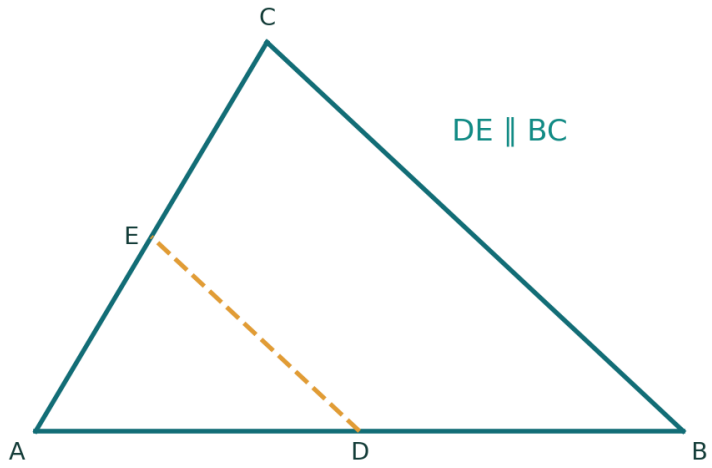
Геометрия · 8 класс

Подобие треугольников и пропорциональные отрезки

1. Основная идея

Два треугольника подобны, если их углы попарно равны, а соответствующие стороны пропорциональны. Для подобия достаточно равенства двух углов (AA), пропорциональности двух сторон с равным углом между ними или трёх пропорциональных сторон.



2. Доказательство

Теорема о средней линии через подобие

Пусть D и E — середины сторон AB и AC треугольника ABC. Тогда AD/AB=AE/AC=1/2, а угол A общий. По признаку подобия (две пропорциональные стороны и угол между ними) треугольники ADE и ABC подобны с коэффициентом 1/2. Поэтому ∠ADE=∠ABC и DE∥BC; кроме того, DE=BC/2.

3. Как действовать

1. Определите пары соответствующих вершин.

2. Сначала докажите подобие по углам или отношениям сторон.

3. Запишите пропорцию в одном порядке (малый/большой).

4. Для площадей возведите коэффициент подобия в квадрат.

Типичная ошибка

Равенство только одной пары углов не означает подобие. Отношение площадей подобных фигур — квадрат коэффициента, а не сам коэффициент.

4. Разобранные примеры

Пример 1. Стороны треугольника 3,4,5, коэффициент 2

Решение. Стороны подобного треугольника: 6,8,10.

Пример 2. Два треугольника с углами 40° и 70°

Решение. Третьи углы также равны 70°, следовательно треугольники подобны по двум углам.

Пример 3. DE∥BC и AD/AB=1/2

Решение. △ADE подобен △ABC, значит DE=BC/2, а отношение площадей 1:4.

Пример 4. Рост человека 1,5 м, тень 2 м; тень дерева 8 м

Решение. По подобию 1,5/2=h/8, откуда h=6 м.

5. Вопросы и задачи для самостоятельной работы

А · Базовый уровень

1. Стороны треугольников 2,3,4 и 4,6,8. Подобны ли треугольники?

2. Стороны 3,4,5 и 6,8,11. Подобны ли треугольники?

3. Периметр первого треугольника 18, коэффициент подобия второго к первому 3. Найдите периметр второго.

4. Соответствующие стороны подобных треугольников относятся как 2:5. Как относятся площади?

Б · Углублённый уровень

5. В △ABC DE∥BC, D∈AB, E∈AC, AD=3, AB=9, BC=12. Найдите DE.

6. Рост человека 1,6 м, его тень 2,4 м, тень дерева 9 м. Найдите высоту дерева.

7. В одном треугольнике углы 40° и 70°, в другом — 70° и 40°. Подобны ли они?

В · Математическая школа

8. Площади подобных треугольников относятся как 9:25. Найдите отношение соответствующих сторон.

9. Докажите подобие двух прямоугольных треугольников, если по одному острому углу в них равны.

10. Докажите, что отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, параллелен третьей стороне.