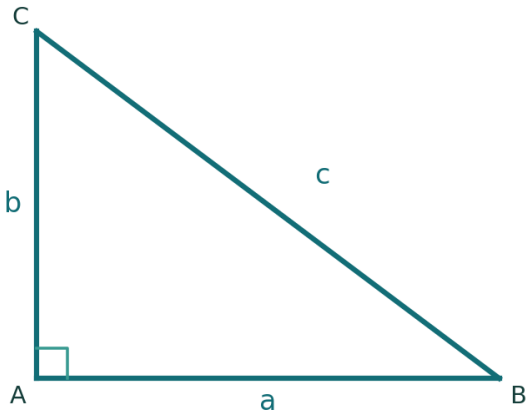
Геометрия · 8 класс

Теорема Пифагора и обратная теорема

1. Основная идея

В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов: $c^2=a^2+b^2$. Обратное тоже верно: если для трёх сторон c (наибольшей), a и b выполняется $c^2=a^2+b^2$, треугольник прямоугольный.



$$a^2+b^2=c^2$$

2. Доказательство

Доказательство разрезанием квадрата

Возьмём квадрат со стороной $a+b$. Разместим внутри четыре одинаковых прямоугольных треугольника с катетами a и b так, чтобы их гипотенузы ограничили центральный квадрат со стороной c. По площадям $(a+b)^2 = 4\cdot(ab/2)+c^2$. Раскрывая скобки и сокращая $2ab$, получаем $a^2+b^2=c^2$.

3. Как действовать

1. Определите прямой угол и противоположную ему гипотенузу.

2. Запишите $c^2=a^2+b^2$.

3. Если неизвестен катет, выразите его: $a=\sqrt{(c^2-b^2)}$.

4. Проверьте: гипотенуза должна быть больше каждого катета.

Типичная ошибка

Нельзя писать $c=a+b$: складываются квадраты длин. Теорема Пифагора применима только к прямоугольному треугольнику.

4. Разобранные примеры

Пример 1. Катеты 3 и 4

Решение. $c=\sqrt{(3^2+4^2)}=\sqrt{25}=5$.

Пример 2. Гипотенуза 13, катет 5

Решение. Другой катет $\sqrt{(13^2-5^2)}=\sqrt{144}=12$.

Пример 3. Диагональ прямоугольника 6×8

Решение. $d=\sqrt{(6^2+8^2)}=10$.

Пример 4. Высота равностороннего треугольника со стороной 8

Решение. Высота делит основание пополам: $h^2=8^2-4^2=48$; $h=4\sqrt{3}$.

5. Вопросы и задачи для самостоятельной работы

А · Базовый уровень

1. Катеты 6 и 8 см. Найдите гипотенузу.

2. Гипотенуза 10 см, катет 6 см. Найдите второй катет.

3. Катеты 9 и 12 см. Найдите гипотенузу.

4. Найдите диагональ квадрата со стороной 5 см.

Б · Углублённый уровень

5. Прямоугольник 8×15 см. Найдите диагональ.

6. Является ли треугольник со сторонами 7,24,25 прямоугольным?

7. Является ли треугольник со сторонами 5,6,8 прямоугольным?

В · Математическая школа

8. Найдите расстояние между точками (1;2) и (4;6).

9. Лестница длиной 13 м стоит в 5 м от стены. На какой высоте её верх?

10. Докажите теорему Пифагора методом площадей.