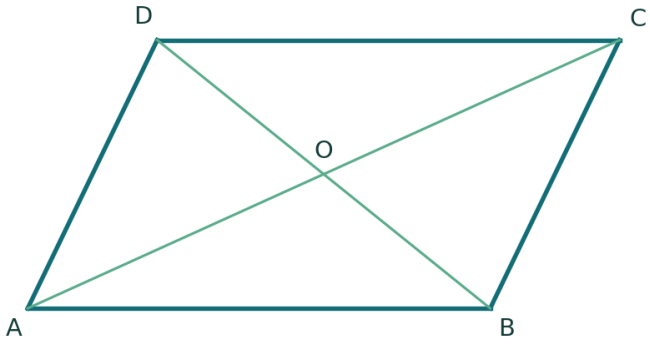
Геометрия · 8 класс

Параллелограмм: свойства и признаки

1. Основная идея

Параллелограмм — четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны. Его противоположные стороны и углы равны, соседние углы в сумме дают 180°, диагонали делятся точкой пересечения пополам.



2. Доказательство

Почему диагонали делятся пополам

Сначала проведём AC. Из параллельности противоположных сторон треугольники ABC и CDA равны по стороне AC и двум прилежащим углам; поэтому AB=CD. Теперь пусть диагонали AC и BD пересекаются в O. В треугольниках AOB и COD равны накрест лежащие углы при AB∥CD, а также стороны AB=CD. По ASA треугольники равны, следовательно AO=OC и BO=OD.

3. Как действовать

1. Нанесите две пары параллельных сторон.

2. Выберите свойство: стороны, углы или диагонали.

3. При необходимости проведите диагональ и сравните треугольники.

4. Для обратной задачи используйте признак параллелограмма, а не предполагаемое свойство.

Типичная ошибка

Не каждый четырёхугольник с равными диагоналями является параллелограммом. Достаточный признак: диагонали делятся точкой пересечения пополам.

4. Разобранные примеры

Пример 1. Соседние стороны 8 см и 5 см

Решение. Периметр $P=2(8+5)=26$ см.

Пример 2. Угол A равен 65°

Решение. Противоположный угол $C=65°$, соседние B и D по 115°.

Пример 3. Диагонали 14 и 10 см

Решение. Точка пересечения делит их пополам: $AO=OC=7$ см, $BO=OD=5$ см.

Пример 4. Площадь с основанием 12 и высотой 7

Решение. $S=12\cdot7=84$ кв. ед.

5. Вопросы и задачи для самостоятельной работы

А · Базовый уровень

1. Соседние стороны 6 и 9 см. Найдите периметр.

2. Угол A равен 72°. Найдите остальные углы.

3. Диагонали равны 18 и 12 см. Найдите их половины.

4. Соседние углы равны $2x$ и $x+30°$. Найдите их.

Б · Углублённый уровень

5. Докажите, что $AB=CD$ и $BC=AD$ в параллелограмме ABCD.

6. Докажите признак: если диагонали четырёхугольника делятся точкой пересечения пополам, это параллелограмм.

7. Докажите равенство треугольников ABC и CDA в параллелограмме.

В · Математическая школа

8. В параллелограмме ABCD точка M — середина AB. Докажите, что площадь $\triangle DMC$ составляет половину площади ABCD.

9. Докажите, что диагонали параллелограмма делят его на четыре треугольника равной площади.

10. Одна пара противоположных сторон четырёхугольника параллельна и равна. Докажите, что это параллелограмм.