8 класс · расширенный урок · выпуск 18

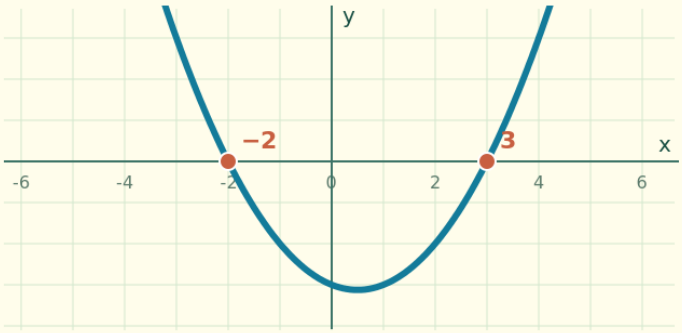
Теорема Виета

Научимся восстанавливать корни без громоздких вычислений: достаточно посмотреть на сумму и произведение.

Основная идея

Если x_1 и x_2 — корни $x^2+px+q=0$, то $x_1+x_2=-p$, $x_1x_2=q$. Для $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq0$) сумма корней равна $-b/a$, произведение c/a. Считать корни с кратностями можно и при $D=0$.

Теорема Виета: сумма и произведение корней



$x_1 = -2,\ x_2 = 3$

$x_1 + x_2 = 1$

$x_1 \cdot x_2 = -6$

$x^2 - x - 6 = 0$

Сумма корней противоположна коэффициенту при x в приведённом уравнении

Почему это работает?

Из разложения $(x-x_1)(x-x_2)=x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2$ и совпадения коэффициентов следует $x_1+x_2=-p$ и $x_1x_2=q$. Обратное тоже верно: если числа u,v имеют сумму $-p$ и произведение q, то $(x-u)(x-v)=x^2+px+q$.

Пошаговый алгоритм

1. Для неприведённого уравнения сначала разделите на ненулевой старший коэффициент a.
2. Определите требуемые сумму и произведение.
3. Подберите пару чисел и проверьте оба равенства.
4. Запишите корни; при необходимости подтвердите их подстановкой.
5. В задачах с параметром учитывайте существование действительных корней.

Типичная ошибка

Нельзя использовать $x_1+x_2=-b$, $x_1x_2=c$ для $ax^2+bx+c=0$, если $a\neq1$: нужно разделить на a.

Пять разобранных примеров

Пример 1. $x^2-7x+12=0$

• Ищем сумму 7 и произведение 12.

• Подходят 3 и 4.

Ответ: x=3, 4

Пример 2. $x^2+5x+6=0$

• Сумма -5, произведение 6.

• Подходят -2 и -3.

Ответ: $x=-2, -3$

Пример 3. $2x^2-10x+12=0$

• Делим на 2: $x^2-5x+6=0$.

• Сумма 5, произведение 6.

Ответ: $x=2, 3$

Пример 4. Составьте квадратное уравнение с корнями -1 и 5

• Сумма корней 4, произведение -5.

• $x^2-4x-5=0$.

Ответ: $x^2-4x-5=0$

Пример 5. $x^2-8x+15=0$: найдите $x_1^2+x_2^2$

• По Виету $x_1+x_2=8$, $x_1x_2=15$.

• $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=64-30$.

Ответ: 34

Продолжение работы

Выполните самостоятельные задания трёх уровней. Ответы раскрываются на сайте после самостоятельной попытки; в печатном домашнем листе ответы отсутствуют. Тест доступен зарегистрированным пользователям после настройки October CMS.