8 класс · расширенный урок · выпуск 18

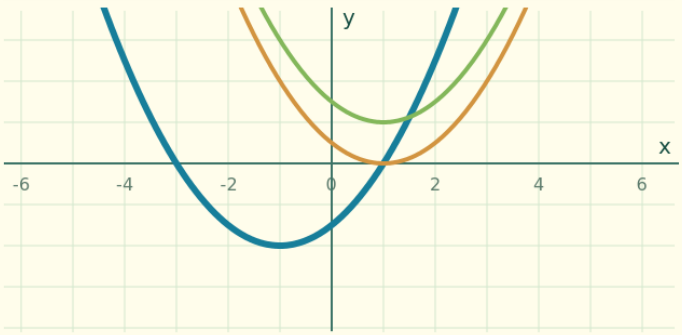
Дискриминант квадратного уравнения

Одна формула помогает заранее определить число корней квадратного уравнения. Выведем её, выделяя полный квадрат.

Основная идея

Для $ax^2+bx+c=0$ при $a\neq0$ дискриминант $D=b^2-4ac$. Если $D>0$, получаются два разных действительных корня; если $D=0$ — один; если $D<0$ — действительных корней нет.

Три случая для дискриминанта



D > 0: два корня

D = 0: один корень

D < 0: корней нет

$D = b^2 - 4ac$

Синяя кривая пересекает Ox дважды, оранжевая касается, зелёная не пересекает

Почему это работает?

Умножим равенство $ax^2+bx+c=0$ на $4a$: $(2ax+b)^2=b^2-4ac=D$. Левая часть — квадрат действительного числа, поэтому при $D<0$ корней нет. При $D\geq0$ получаем $2ax+b=\pm\sqrt{D}$ и $x=(-b\pm\sqrt{D})/(2a)$.

Пошаговый алгоритм

1. Приведите уравнение к стандартному виду и проверьте $a\neq0$.
2. Выпишите a, b, c вместе со знаками.
3. Найдите $D=b^2-4ac$.
4. По знаку D определите число действительных корней.
5. При $D\geq0$ вычислите корни по формуле и проверьте подстановкой.

Типичная ошибка

Часто ошибаются со знаком b: если $b=-5$, то $b^2=25$. Ещё нельзя забывать, что в знаменателе формулы стоит $2a$.

Пять разобранных примеров

Пример 1. $x^2 - 5x + 6 = 0$

- Коэффициенты: $a=1$, $b=-5$, $c=6$.
- Дискриминант $D=(-5)^2-4\cdot(1)\cdot(6)=1$.
- Корни $x=(-b\pm\sqrt{D})/(2a)$: $x_1=2$, $x_2=3$.

Ответ: $x_1=2$, $x_2=3$

Пример 2. $x^2 + 4x + 4 = 0$

- Коэффициенты: $a=1$, $b=4$, $c=4$.
- Дискриминант $D=(4)^2-4\cdot(1)\cdot(4)=0$.
- $D=0$, единственный корень $x=-b/(2a)=-2$.

Ответ: $x=-2$

Пример 3. $x^2 + 4 = 0$

- Коэффициенты: $a=1$, $b=0$, $c=4$.
- Дискриминант $D=(0)^2-4\cdot(1)\cdot(4)=-16$.
- При $D<0$ действительных корней нет.

Ответ: корней нет

Пример 4. $2x^2 - 3x - 2 = 0$

- Коэффициенты: $a=2$, $b=-3$, $c=-2$.
- Дискриминант $D=(-3)^2-4\cdot(2)\cdot(-2)=25$.
- Корни $x=(-b\pm\sqrt{D})/(2a)$: $x_1=-1/2$, $x_2=2$.

Ответ: $x_1=-1/2$, $x_2=2$

Пример 5. $3x^2 + 2x - 1 = 0$

- Коэффициенты: $a=3$, $b=2$, $c=-1$.
- Дискриминант $D=(2)^2-4\cdot(3)\cdot(-1)=16$.
- Корни $x=(-b\pm\sqrt{D})/(2a)$: $x_1=-1$, $x_2=1/3$.

Ответ: $x_1=-1$, $x_2=1/3$

Продолжение работы

Выполните самостоятельные задания трёх уровней. Ответы раскрываются на сайте после самостоятельной попытки; в печатном домашнем листе ответы отсутствуют. Тест доступен зарегистрированным пользователям после настройки October CMS.